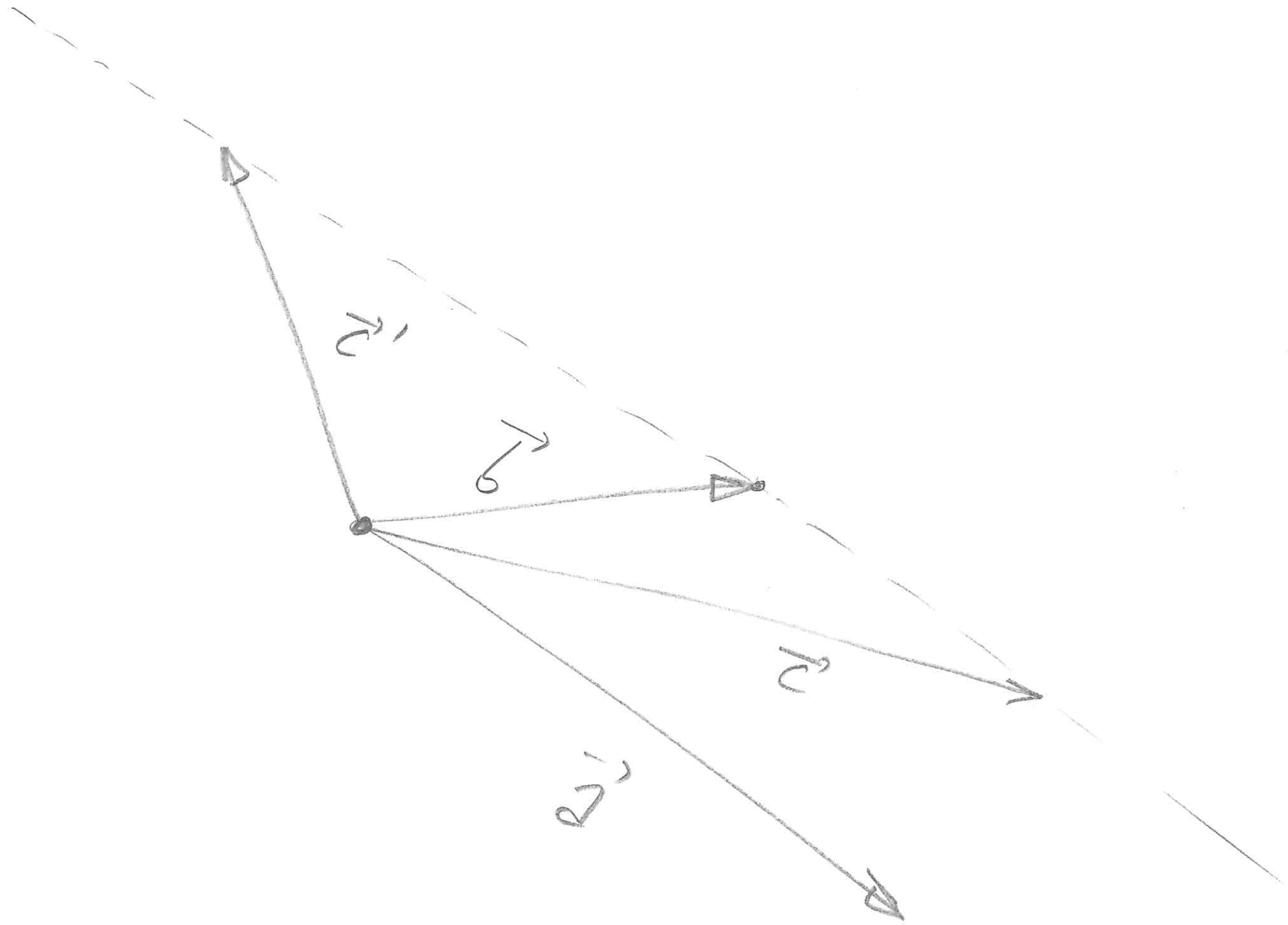
$\boxed{1.5.12}$

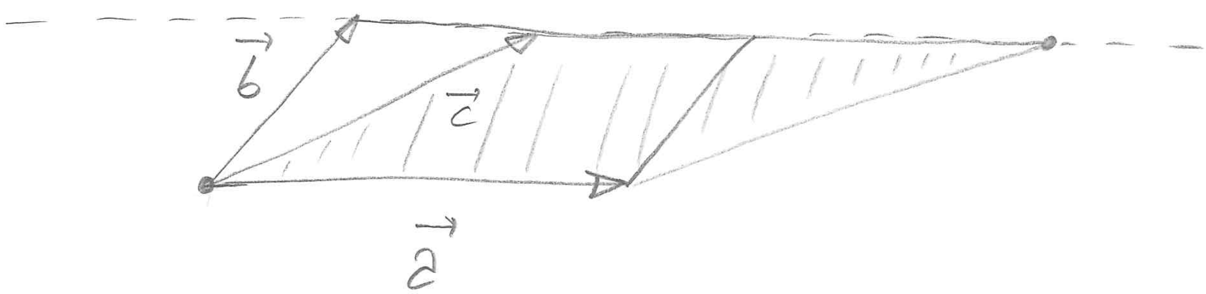
1MR



Les vecteurs ayant la propriété demandée ont la même origine que le vecteur $\vec{a}$. Leur extrémité se trouve sur la parallèle à $\vec{a}$ par l'extrémité de $\vec{b}$, dans le plan défini par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

$\boxed{1.5.12}_2$

1MR



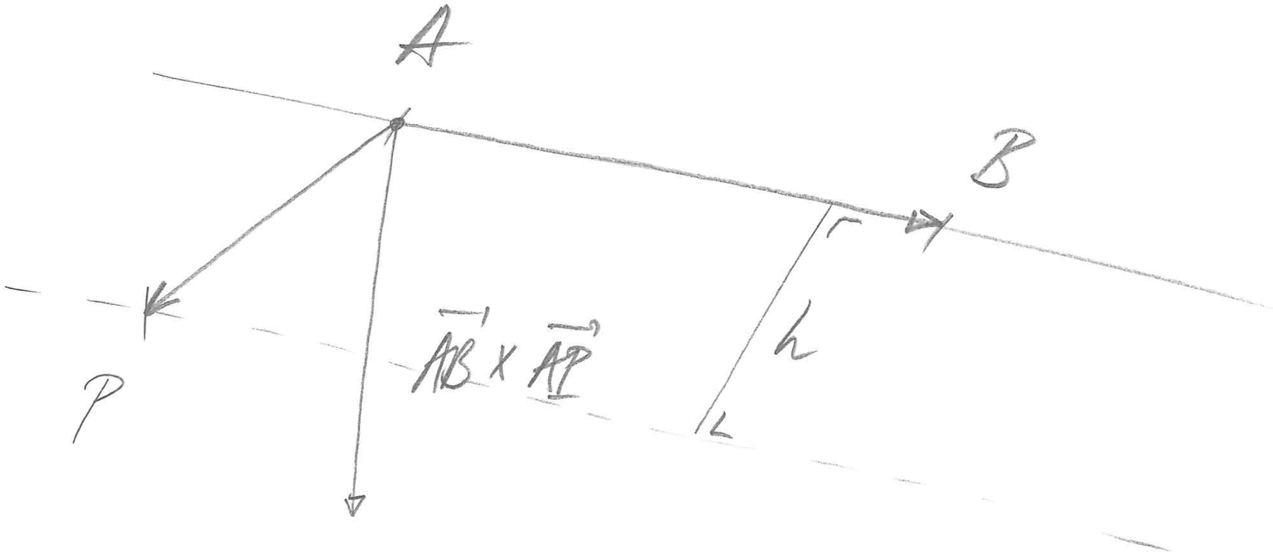
En effet, l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est la même que l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{c}$ vu que ces deux polygones ont même hauteur.

1.5.15

1MR

$$\vec{AB} = (-1; -1; -1)$$

$$\vec{AP} = (0; 3; 0)$$



On sait que la hauteur h du triangle construit sur A, B et P est donnée par :

$$h = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{\|(3; 0; -3)\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

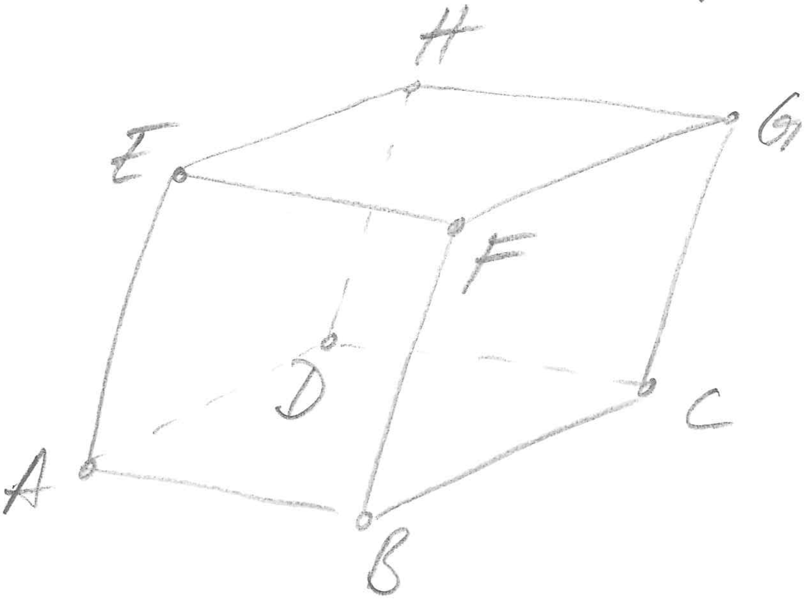
$$= \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad \text{distance}\,(P ; d_{AB}) = h = \sqrt{6}$$

1.5.18

1MR

a)



On constate que

$\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{HG} = \vec{EF} = (-1; 2; -1)$

$\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{FG} = \vec{EH} = (2; 0; 0)$

$\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH} = (3; -1; -4)$

Le polyèdre ABCD EFGH est donc un parallélépipède.

$\boxed{1.5.18}_2$ 1MR

b) $\overrightarrow{PQ} = (3;6;3)$ $\overrightarrow{PR} = (1;3;-2)$

$\overrightarrow{PS} = (2;2;2)$

$\frac{1}{3} \cdot \det(\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{PR};\overrightarrow{PS})$

$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{3} \left[3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right]$

$= \frac{1}{3} \cdot (-18) = -6$

$\Rightarrow V = |-6| = 6$

$\boxed{1.5.18}_3$ 1MR

c) On pose $D=(0;k;0)$. On a alors:

$\vec{AB}=(1;-1;0)$

$\vec{AC}=(0;-2;4)$

$\vec{AD}=(-2;k-1;1)$

On doit avoir:

$$\left|\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & -2 & k-1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\right|=5$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{3}(2-4k)\right|=5 \Leftrightarrow 2-4k=\pm 15$$

$$\Leftrightarrow 4k=2\pm 15 \quad \begin{cases} k=17/4 \\ k=-13/4\end{cases}$$

Les points cherchés sont:

$D\,(0;17/4;0)$ et $D'(0;-13/4;0)$

$\boxed{1.5.18}_4$ 1MR

d) $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3)$

$\overrightarrow{AC} = (4; 0; 6)$

$\overrightarrow{AD} = (-7; -7; 7)$

$V_{ABCD} = 308$

$A_{ABC} = \| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| = \| (-12; -24; 8) \|$

$= 28$

$\rightarrow h_D = \dfrac{308}{28} = 11$