111R

$\boxed{1.5.5}$

a) $\vec{CA} = (-1; -2; 4)$

$\vec{CB} = (-2; -1; 4)$

$\vec{CA} \times \vec{CB} = (-4; -4; -3) = \vec{n}$

Calcul de l'angle aigu entre $\vec{n}$ et $\vec{OC}$:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{OC}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{OC}\|} = \frac{|-4|}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{24}}$$

vu que $\vec{OC} = (2; 2; -4)$

$\cos\varphi \simeq 0{,}12751$

$\varphi \simeq \cos^{-1}(0{,}12751) \simeq 82{,}674°$

$\Rightarrow$ L'angle cherché vaut environ $\underline{\underline{7{,}326°}}$

1MR

$\boxed{1.5.5}$

b) $\vec{CA} = (-1; -1; -2)$

$\vec{CB} = (0; -2; -1)$

$$\vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 0 \\ \vec{j} & -1 & -2 \\ \vec{k} & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = (-3; -1; 2)$ $\quad$ $\vec{OC} = (1; 2; 2)$

Angle aigu entre $\vec{n}$ et $\vec{OC}$:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{OC}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{OC}\|} = \frac{|-3-2+4|}{\sqrt{14}\sqrt{9}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{14}} \simeq 0,089087$$

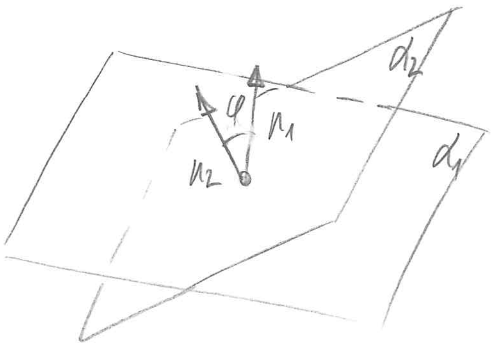
$\cos^{-1}(0,089087) = \underline{84,889°}$

$\Longrightarrow$ l'angle cherché vaut environ : $\underline{5,111°}$

MR

$\boxed{1.5.6}$

a) L'angle entre 2 plans est défini comme étant l'angle entre les normales qui n'est autre que l'angle entre les vecteurs normaux.



$\overrightarrow{AB} = (2; -1; -2)$ $\overrightarrow{AC} = (-4; 11; 13)$

$\overrightarrow{AD} = (5; 10; -5) = 5(1; 2; -1)$

$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (9; -18; 18) = 9(1; -2; 2)$

$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (25; 0; 25) = 25(1; 0; 1)$

$$\cos\varphi = \frac{|(1;-2;2) \bullet (1;0;1)|}{\|(1;-2;2)\| \cdot \|(1;0;1)\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{1.5.6}_2$ 1MR

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$$

L'angle aigu que forment les faces ABC et ABD vaut donc 45°.

b) On calcule tout d'abord l'angle entre les vecteurs $\vec{AD}$ et n_1 :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{AD} \cdot n_1|}{\|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{n_1}\|} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{5}{3\sqrt{6}}$$

$\cos\varphi \simeq 0{,}680414 \Rightarrow \varphi \simeq \underline{\underline{47.124°}}$

L'angle qui nous intéresse vaut environ

$90° - 47.124 = \underline{\underline{42.876°}}$

$\boxed{1.5.7}$

1MR

L'identité de Lagrange s'écrit:

$$\boxed{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2}$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 1 \\ \vec{j} & 2 & -3 \\ \vec{k} & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|\vec{a}\|^2 = 21 \quad \|\vec{b}\|^2 = 35 \quad (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 = 729$

et $\|\vec{n}\|^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = 6$

$21 \cdot 35 - 729 = 735 - 729 = 6$

L'identité est vérifiée.

$\boxed{1.5.9}$ MR

Trois vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha \cdot \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det(\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}) = 0}$$

a) $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} =$

$$2\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$2(11-27) - 3(-11-3) - 1(9+1) =$$

$$-32 + 42 - 10 = 0$$

Les vecteurs sont coplanaires.

$\boxed{1.5.9}_2$ 1MR

b) Cela revient à voir si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 4)$ $\overrightarrow{AC} = (-3; -2; 7)$

$\overrightarrow{AD} = (12; -6; 7)$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 \\ -1 & -2 & -6 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 91 \neq 0$$

Les points A, B, C et D ne sont pas tous contenus dans un même plan.

1.5.9 $\qquad$ 1MR

3

c) $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} =$

$2\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 1 \end{vmatrix} =$

$2(k^2-1) - 1(k-3) + 2(1-3k) =$

$2k^2 - 2 - k + 3 + 2 - 6k =$

$\underline{2k^2 - 7k + 3}$ On doit trouver les valeurs de k qui annulent ce polynôme: $2k^2 - 7k + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (k-3)(2k-1) = 0$

$\Leftrightarrow k = 3 \,/\, k = 1/2$

Si $k=3$ ou $k = 1/2$, les vecteurs sont coplanaires.

$\boxed{1.5.9}_4$ 1MR

d) Soit $D = (0;0;k)$ un point quelconque de l'axe Oz.

$\vec{AB} = (-1;-3;2)$ $\vec{AC} = (3;0;-2)$

$\vec{AD} = (-1;-1;k-1)$

$$\det(\vec{AB};\vec{AC};\vec{AD}) = \det\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$= 9k - 19 = 0$$

$\Rightarrow k = 19/9$

Le point cherché est donc

$D(0;0;19/9)$

$\boxed{1.5.9}_5$

1MR

e) $\overrightarrow{AB} = (1/3 ; 2/3 ; -1)$

$\overrightarrow{AC} = (3/4 ; -1/2 ; 3/4)$

$\overrightarrow{AD} = (1 ; 2/5 ; -3/5)$

$$[\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}] = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} \bullet (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})$$

$$= \det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD})$$

$$[\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}] = \det\begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 & 1 \\ 2/3 & -1/2 & 2/5 \\ -1 & 3/4 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.