On réunit 6 personnes.

Soit A et B deux de ces personnes.

On suppose que

$$A \text{ connait } B \iff B \text{ connait } A,$$

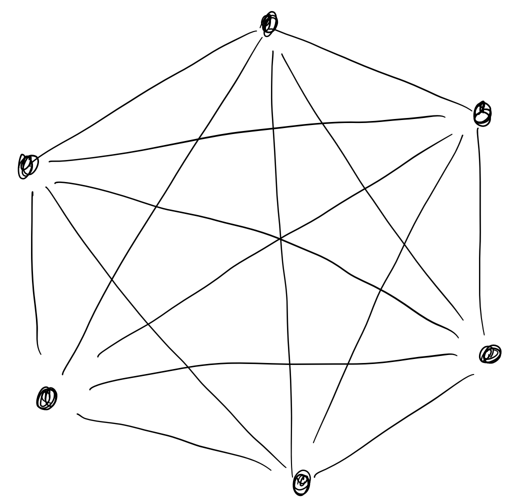
ce qui revient à dire que la relation « connaître » est symétrique.

Dans ce cas, on peut montrer que

ou bien 3 parmi ces 6 personnes ne se connaissent pas mutuellement

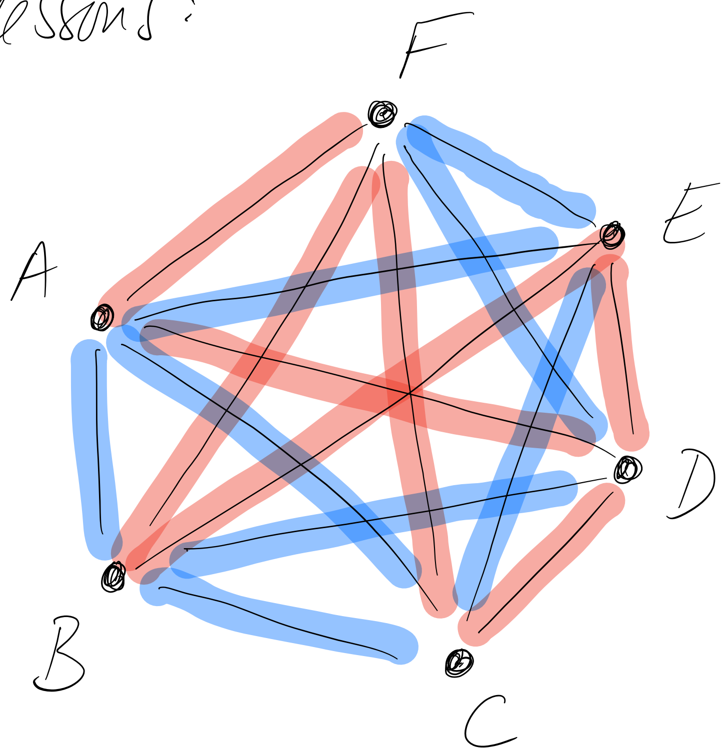
ou bien 3 parmi ces 6 personnes se connaissent mutuellement.

On va utiliser comme modèle mathématique le graphe complet à 6 sommets K_6



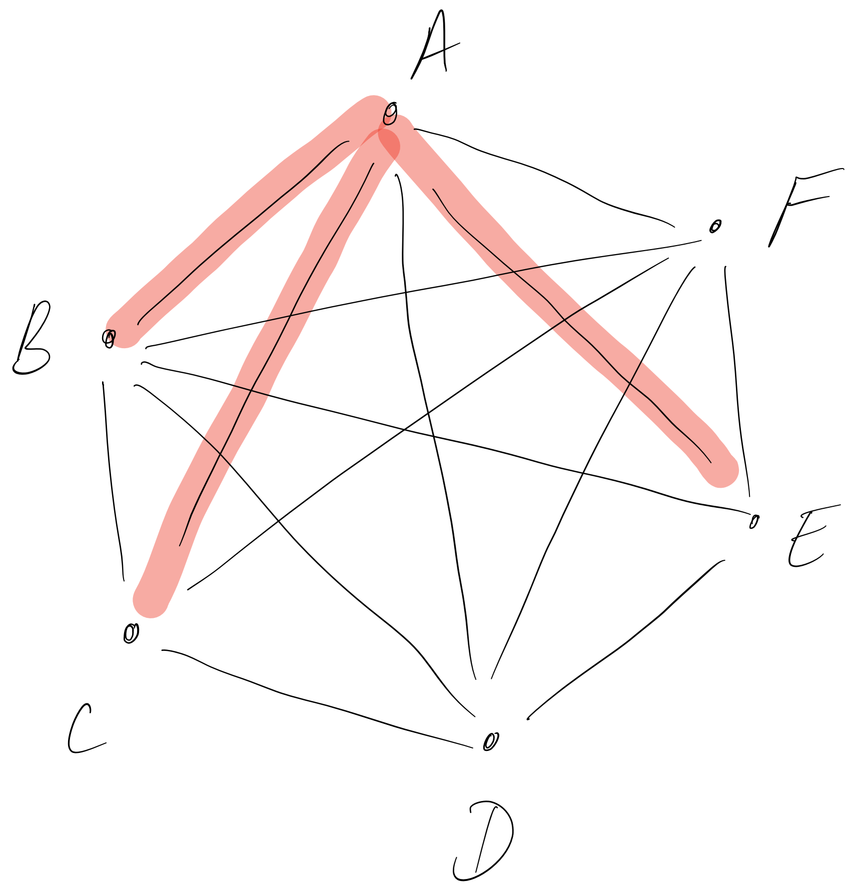
Les sommets représentent les personnes.
Une arête sera surlignée en bleu si les deux personnes qu'elle relie se connaissent et en rouge sinon.

Une situation possible est dessinée ci-dessous :



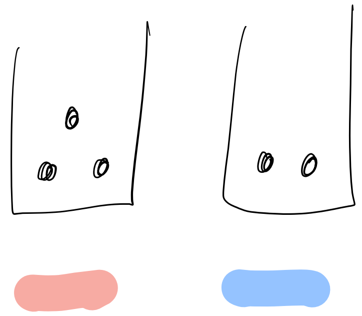
On voit dans cette situation que A, B et C se connaissent, entre autres.

Donnons maintenant un argument qui montre qu'on ne peut pas faire un dessin de ce type sans qu'un « triangle » rouge ou bleu n'apparaisse.



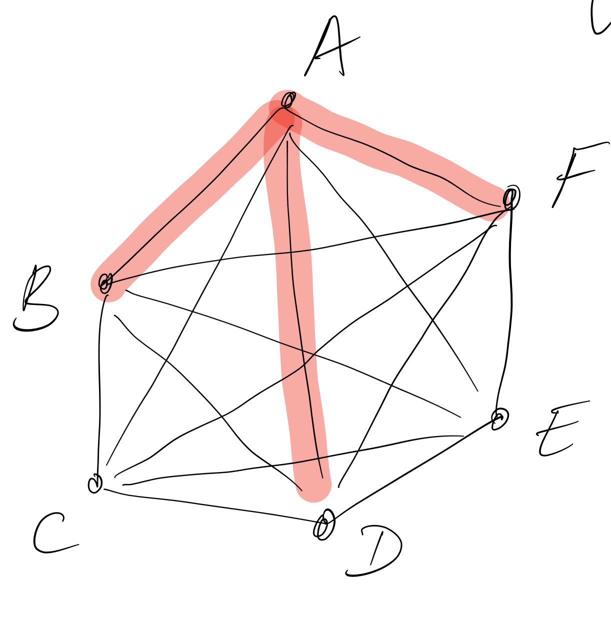
Parmi les arêtes AB, AC, AD, AE, AF, trois forcément seront surlignées de la même couleur.

En effet, si j'ai 5 billes à mettre dans deux boîtes, l'une au moins des boîtes contiendra 3 billes :



(bille $\longleftrightarrow$ arête)

Le dessin se présente donc sous la forme ci-dessous, obligatoirement :

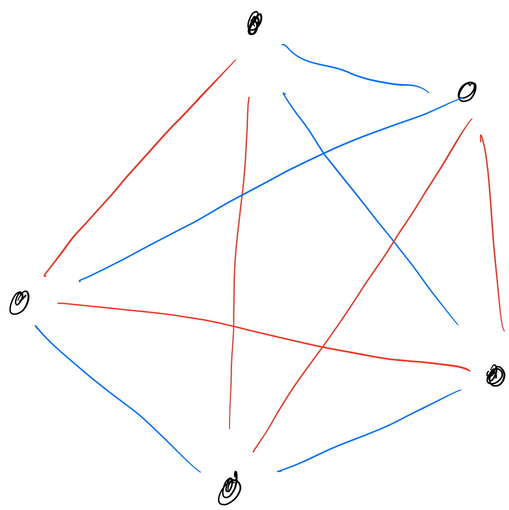


Si on ne veut pas de triangle rouge, on doit surligner les arêtes BF, BD et DF en bleu, ce qui nous donne forcément un triangle bleu.

L'un des deux triangles doit forcément apparaître.

Il y a donc forcément trois personnes qui se connaissent mutuellement, ou qui ne se connaissent pas mutuellement.

Voyons encore le cas de 5 personnes.



On peut colorier les arêtes de K_5 avec deux couleurs sans faire apparaître de triangle monochrome.