$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ c+d & -c+d \end{pmatrix}$$

$\boxed{A \cdot B = B \cdot A}$ donne les quatre équations suivantes:

$$\begin{cases} a-c = a+b \\ a+c = c+d \\ b-d = -a+b \\ b+d = -c+d \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -c \\ a = d \\ -d = -a \\ b = -c \end{cases}$$

Ce qui donne, en simplifiant:

$$\begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases}$$

On peut choisir c et d librement.

On peut donc écrire:

$$B = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-c & -c-d \\ d+c & -c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-c & -d-c \\ c+d & -c+d \end{pmatrix}$$

✓