Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = a+bi$

et montrons que $(\overline{z})^2 = \overline{(z^2)}$

$$(\overline{z})^2 = (a-bi)^2$$

$$= a^2 - 2abi + b^2 i^2$$

$$= a^2 - 2abi - b^2$$

$$z^2 = (a+bi)^2$$

$$= a^2 + 2abi + b^2 i^2$$

$$= a^2 + 2abi - b^2$$

$$= (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$\Rightarrow \overline{(z^2)} = (a^2 - b^2) - 2abi$$
$$= a^2 - 2abi - b^2$$
$$= (\overline{z})^2$$

Ainsi, on a bien $(\overline{z})^2 = \overline{(z^2)}$.

Montrons maintenant que si $r \in \mathbb{R}$, on a $\overline{(rz)} = r \cdot \overline{z}$

$$\overline{(r \cdot (a+bi))} = \overline{(ra + rbi)}$$
$$= ra - rbi$$
$$= r \cdot (a - bi)$$

$= r \cdot \overline{z}$

CQFD

Montrons enfin que si

$w = c + di \in \mathbb{C}$, alors

$$\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$$

En effet,

$$\overline{(z+w)} = \overline{(a+bi+c+di)}$$
$$= \overline{(a+c)+(b+d)i}$$
$$= (a+c) - (b+d)i$$
$$= a+c-bi-di$$

$$= a - bi + c - di$$

$$= \overline{z} + \overline{w}$$

On peut déduire de ces propriétés que si

$$az^2 + az + c = 0$$

pour $z \in \mathbb{C}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$,

alors $a(\overline{z})^2 + az + c = 0$

En effet,

$$\overline{(az^2 + bz + c)} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{az^2} + \overline{bz} + \overline{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\overline{(z^2)} + b\bar{z} + c = 0$$

car si $c \in \mathbb{R}$, $\bar{c} = c$

$$\Leftrightarrow \quad a(\bar{z})^2 + b\bar{z} + c = 0$$

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}$ est solution

de $az + bz + c = 0$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$,

alors $\bar{z}$ l'est aussi.