Dans tout cet exercice, on utilise le fait que la racine d'un nombre négatif n'existe pas dans les nombres réels.
Les divisions par 0 sont interdites, elles aussi !

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Pour éviter les racines de nombres négatifs, on détermine le signe de ce qui est à l'INTÉRIEUR.

$x^2+x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ x^2+x+1 ne change pas de signe.

Vu que $0^2+0+1 > 0$, $x^2+x+1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R}$

b) <u>Signe de $x-1$</u> :

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}$ existe ssi $x \geq 1$

Signe de $x-5$:

x		5	
$x-5$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \sqrt{x-5}$ existe ssi $x \geq 5$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x-5}$ est définie

ssi $x \in [5;+\infty[$

$\Rightarrow \mathcal{ED}(f) = [5;+\infty[$

c) <u>Signe de $(x-1)(x-5)$</u> :

x		1		5	
$(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(x-5)}$ existe ssi $x \in \overbrace{]-\infty;1] \cup [5;+\infty[}^{\mathcal{ED}(f)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2-5x+4}$

① $\sqrt{6-2x}$ est définie ssi $6-2x \geq 0$.

Signe de $6-2x$:

x		3	
$6-2x$	$+$	0	$-$

$\Rightarrow \sqrt{6-2x}$ existe ssi $x \in]-\infty ; 3]$

② On peut diviser par x^2-5x+4 si $x^2-5x+4 \neq 0$.

Or, $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$\Rightarrow ED(f) =]-\infty ; 1[\cup]1 ; 3[$

e) <u>Signe de</u> $\frac{x+1}{x-4}$:

x		-1		4	
	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

$\sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$ existe ssi $x \in \underbrace{]-\infty;-1] \cup]4;+\infty[}_{ED(f)}$

f) <u>Signe de $1-x^2$</u> :

x		-1		1	
	$-$	0	$+$	0	$-$

$\sqrt{1-x^2}$ existe ssi $x \in [-1;1]$

De plus, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ existe ssi $x \in]-1;1[$,

car on ne peut pas diviser par 0.

Ainsi, $\frac{x^2+7x}{\sqrt{1-x^2}}$ existe ssi $x \in \underbrace{]-1;1[}_{ED(f)}$