$\boxed{2.4.12}$ 2MR

a) Montrons, par récurrence sur n, que $v_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 1$

$\boxed{n=1}$ $v_1 = a_1 - 4 = 3 - 4 = -1$

$= -1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$

Supposons que $v_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = a_n - 4$

$\Rightarrow a_n = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

On peut donc écrire:

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 4 = \frac{a_n + 12}{4} - 4$$

$$= \frac{4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 12}{4} - 4$$

$\boxed{2.4.12}_2$ 2MR

$$\Rightarrow v_{n+1} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3 - 4$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \boxed{\checkmark}$$

b) Le terme général de (a_n) s'écrit donc :

$$a_n = v_n + 4 = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 4 - \underbrace{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0}$$

$$= 4$$