2MR

$\boxed{2.4.7}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1,$

par définition de la fonction cos.

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$$

Théorème des deux gendarmes

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$$

$\boxed{2.4.7}$ 2MR

b) $$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{array}{ccccc} -\dfrac{1}{n} & & \dfrac{(-1)^n}{n} & & \dfrac{1}{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad n \to +\infty \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

c) On a $-1 \leq \sin(n!) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$-n \leq n \cdot \sin(n!) \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n \cdot \sin(n!)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{-n}{n^2+1} & & \dfrac{n \cdot \sin(n!)}{n^2+1} & & \dfrac{n}{n^2+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad n \to +\infty \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\boxed{2.4.7}_3$ 2MR

c) (Suite) Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \cdot \sin(n!)}{n^2+1} = 0$$

d) On a $0 < \frac{n!}{n^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

De plus, pour $k \in \{1; \dots; n-1\}$,

$$n - k < n$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{\cancel{n} \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}$$

$$\leq 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$\boxed{2.4.7}$ 2MR

d) (Suite) On peut donc écrire:

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

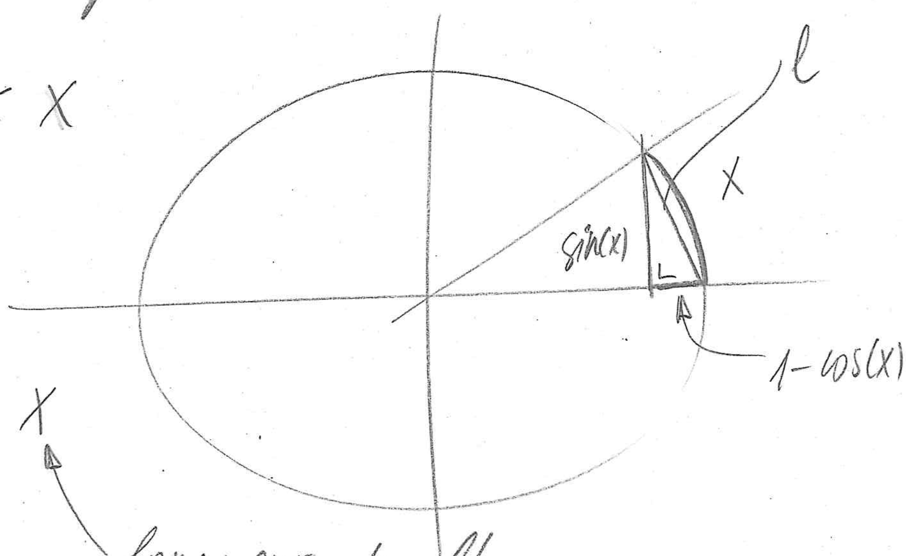
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad n \to +\infty$$

On a $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

e) Observons que si $x > 0$ est assez petit,

$\sin(x) < x$

En effet,



$\sin(x) < l < x$

hypothénuse longueur de l'arc.

$\boxed{2.4.7}$ 2MR

5

e) (Suite) On peut donc écrire, pour une assez grande valeur de n :

$$0 < n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) < n \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} < \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} < \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \quad n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$\boxed{2.4.7}_6$ 2MR

f) $E(nx) \in \mathbb{N}$ si $n \in \mathbb{N}$
et que $x > 0$

$$E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$$

$$\Rightarrow \quad nx - 1 < E(nx) \leq nx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{nx-1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leq \frac{nx}{n}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leq x$$

$$x - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \qquad x \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

$\boxed{2.4.7}_7$ 2MR

fi (suite) On peut donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(nx)}{n} = x$$