$\boxed{2.4.8}_1$ 2MR

a) Montrons que la suite est majorée par le nombre 2, par récurrence sur n :

$\boxed{n=1}$ $u_1 = \sqrt{2} < 2$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$ Supposons que $u_n < 2$

$\Leftrightarrow 2u_n < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2u_n} < 2$

$\Leftrightarrow u_{n+1} < 2$ ✓

Montrons maintenant, également par récurrence sur n, que u_n est croissante :

$\boxed{n=1}$ $u_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = u_2$

$\sim 1,4142$ $\sim 1,6818$ ✓

$\boxed{2.4.8}_2$ 2MR

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow (n+1) \checkmark}$ Supposons que $u_n < u_{n+1}$.

$\Leftrightarrow \quad 2u_n < 2u_{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2u_n} < \sqrt{2u_{n+1}}$

$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} < u_{n+2}$ $\boxed{\checkmark}$

b) La suite (u_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente. On peut écrire:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2u_n}$$

$$= \sqrt{2 \cdot \lim_{n\to\infty} u_n}$$

Or, on peut écrire $u = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n$

$\Rightarrow u = \sqrt{2u} \Rightarrow u^2 - 2u = 0 \Rightarrow \boxed{u = 2}$

Vu que u_n est croissante et que $u_1 \cong 1{,}4142$