a) $x \to +\infty$: « $\infty - \infty$ » (Indétermination)

$$\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1} + x}{\sqrt{x^2+x+1} + x} =$$

$$\frac{x^2+x+1 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x} \overset{x>0}{=}$$

$$\frac{1 + 1/x}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2}} + 1} = \frac{1 + 1/x}{\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + 1}$$

$$\Big\downarrow x \to +\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

D'autre part :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

b) $x \to +\infty$: « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » (Indétermination)

$$\frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1} \cdot \frac{1/x}{1/x} \overset{x>0}{=} \frac{\sqrt{4-4/x+3/x^2}}{1+1/x}$$

$$\downarrow x \to +\infty$$

$$\frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

$x \to -\infty$: « $\frac{+\infty}{-\infty}$ » Ind.

$$\frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1} \cdot \frac{1/x}{1/x} \overset{x<0 \Leftrightarrow x=-|x|}{=} \frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{1+1/x} \cdot \frac{-1/\overset{|x|}{\sqrt{x^2}}}{1}$$

$$= - \frac{\sqrt{4-4/x+3/x^2}}{1+1/x}$$

$$\downarrow x \to -\infty$$

$$-\frac{\sqrt{4}}{1} = -2$$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ est indéterminée (« $\infty - \infty$ »)

1^{er} cas : $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4}}{1} =$$

$$\frac{x^2+2x - (x^2+4)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+4}} \overset{x>0}{=} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{1/x}{1/\sqrt{x^2}} =$$

$$\frac{2 - 4/x}{\sqrt{1+2/x} + \sqrt{1+4/x}} \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{2}{1+1} = 1$$

2^{ème} cas : $x < 0$

$$\frac{2x-4}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+4}} \overset{x<0}{=} \frac{2 - 4/x}{-1/\sqrt{x^2} \cdot \left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+4}\right)}$$

$$= \frac{2 - 4/x}{-\left(\sqrt{1+2/x} + \sqrt{1+4/x}\right)} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \frac{2}{-(1+1)} = -1$$

d) $x \to +\infty$: $\ll \frac{+\infty - \infty}{\infty} \gg$

Indétermination

$$\frac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3} \cdot \frac{1/x}{1/x} \overset{x>0}{=} \frac{2 - \sqrt{4 + 2/x - 5/x^2}}{1 + 3/x}$$

$$\Big\downarrow x \to +\infty$$

$$\frac{2-2}{1} = 0$$

Indétermination

$x \to -\infty$: $\ll \frac{-\infty - \infty}{-\infty} \gg$

$$\frac{2x - \sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3} \cdot \frac{1/x}{1/x} \overset{x<0}{=}$$

$$\frac{2 + \sqrt{4 + 2/x - 5/x^2}}{1 + 3/x} \xrightarrow{x \to -\infty} \frac{2+2}{1} = 4$$

e) On sait que $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 1 \geq -\cos x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{2x - \cos x \geq 2x - 1}_{}$$

$$2x - 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (2x - \cos x) = +\infty$$

De même, $2x - \cos x \leq 2x + 1$

$$2x + 1 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} (2x - \cos x) = -\infty$$

f) Vu la solution de la question d), on peut écrire :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{2x-1}{x-1} & \le & \dfrac{2x-\cos x}{x-1} & \le & \dfrac{2x+1}{x-1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to\infty} \\ 2 & & 2 & & 2 \end{array}$$

On applique le théorème des deux gendarmes pour conclure que la limite cherchée est 2, dans les deux cas.

g) $$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

$$= 1$$

h) Vu que $1/x \longrightarrow 0$ si $x \to \infty$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$