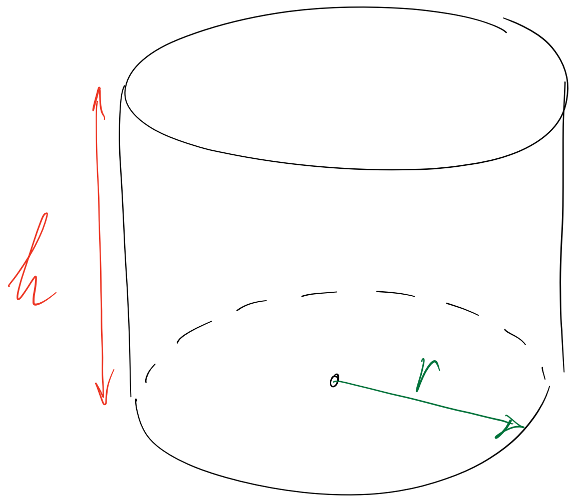


Le calcul du volume permet de réduire le nombre d'inconnues à l'aide de la contrainte $V = 324\pi$.

$$V = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{aire de la base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{hauteur}}$$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 324\pi \Leftrightarrow r^2 h = 324$$

$$\Rightarrow h = \frac{324}{r^2}$$

Le conteneur « le plus économique » est celui qui a le plus petit coût, qui dépend de la surface totale.

La surface se calcule comme suit :

- fond : $\pi \cdot r^2$

- paroi latérale : $\underbrace{2 \cdot \pi \cdot r}_{\text{circonférence du fond}} \cdot h$

On en déduit le coût total :

$$15 \cdot \pi \cdot r^2 + 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = C$$

$$\Rightarrow C(r) = 5\pi\left(3r^2 + 2 \cdot r \cdot \frac{324}{r^2}\right)$$

$h(r)$

$$\Leftrightarrow C(r) = 5\pi\left(3r^2 + \frac{648}{r}\right)$$

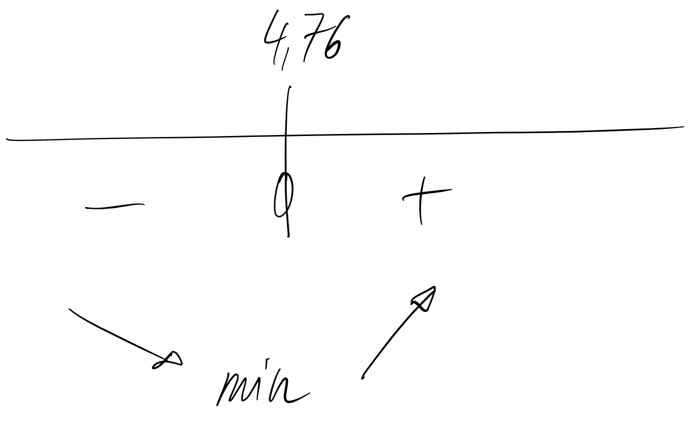
On doit étudier la croissance de $C(r)$, pour trouver le minimum de ce coût.

$$C'(r) = 5\pi\left(6r - \frac{648}{r^2}\right)$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow 3r - \frac{324}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3r^3 - 324}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r^3 = 108$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{108} \Leftrightarrow r \simeq 4.76$$



Le coût est minimal pour $r \simeq 4,76$.

La valeur de h qui correspond est

$$h = \frac{324}{r^2} \simeq 14.29$$