$\mathscr{C}: x^2+y^2-2x+4y=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+4y=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=1+4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5$

$\Rightarrow C(1;-2) \quad r=\sqrt{5}$

On sait que $d: x-2y-345=0$

Soit $d_\perp$ une droite perpendiculaire à d.

Son équation s'écrit $d_\perp: 2x+y+k=0$

pour $k\in\mathbb{R}$

Reste à trouver k, sachant que

$$\text{dist}(C\,;\,d_1) = \sqrt{5}$$

On doit donc résoudre

$$\frac{|2 \cdot 1 + (-2) + k|}{\sqrt{2^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad |k| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm 5$$

Les deux droites cherchées sont

donc $\quad 2x + y + 5 = 0$

et $\quad 2x + y - 5 = 0$