$$x^2+y^2=19-2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+2x+y^2-19=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2-1+y^2-19=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+y^2=20$$

$C(-1;0)$ et $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Calcul des tangentes: $y=mx+h$

$A(1;6)$ est sur la tangente, ce qui implique $6=m+h$; $\boxed{h=6-m}$

La distance entre C et la tangente vaut $2\sqrt{5}$:

$$\text{dist}\big((-1;0);\, y-mx-h=0\big)=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|0-(-1)\cdot m-(6-m)|}{\sqrt{1+m^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|2m-6|}{\sqrt{1+m^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad (2m-6)^2 = 4\cdot 5\cdot(1+m^2)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{4m^2}-24m+36 = 20+\cancel{20m^2}$$

$$\Rightarrow \quad 16m^2+24m-16=0$$

$$\Rightarrow \quad 2m^2+3m-2=0 \; ; \; (2m-1)(m+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1/2 \; ; \; m' = -2$$

Les équations des tangentes sont donc

$$y = \frac{1}{2}x + h' \quad \text{et} \quad y = -2x + h$$

Pour trouver h et h', on utilise le fait que A est sur les tangentes, à savoir $h' = 6 - m'$ et $h = 6 - m$

$$\Rightarrow \quad h = 6 - (-2) = 8 \quad \text{et} \quad h' = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{2y = x + 11}$$

$$\Rightarrow \quad y = -2x + 8 \Rightarrow \boxed{2x + y = 8}$$