a) $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $|a| \cdot |b| = a \cdot b$

et $|a \cdot b| = a \cdot b \Rightarrow |a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

$a \geq$ et $b < 0$: $|a| \cdot |b| = a \cdot (-b)$

et $|a \cdot b| = -(a \cdot b)$ car $a \cdot b \leq 0$

$\Rightarrow |a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

$a < 0$ et $b \geq 0$: comme le cas précédent

$a < 0$ et $b < 0$: $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b)$

$= a \cdot b > 0$ par la règle des signes.

$|a \cdot b| = a \cdot b$ pour la même raison.

$\Rightarrow |a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

b) $a \geq 0$ et $b \geq 0$: Dans ce cas,

$a+b \geq 0$ et $|a+b| = a+b$.

De plus, $|a| + |b| = a+b$. Ainsi,

$|a+b| = |a| + |b|$

$a < 0$ et $b < 0$: Cette fois, $a+b < 0$

$$\Rightarrow |a+b| = -(a+b)$$

$$= -a - b = |a| + |b|$$

Par définition de la valeur absolue, ce qui termine la démonstration.

c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= |a|^2 + 2ab + |b|^2$$

$$\leq |a|^2 + |2ab| + |b|^2$$

Voir question a)

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$

$$= \left(|a| + |b|\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{\left(|a| + |b|\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$$

d) $|a-b| = |a-c+c-d+d-b|$

$$\leq |a-c| + |c-d+d-b|$$

$$\leq |a-c| + |c-d| + |d-b|$$