Soit $A = \{ n/(3n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

On cherche à calculer

$\min A$, $\sup A$

Montrons que si $n \geq 1$, alors

$$\frac{n+1}{3(n+1)+1} > \frac{n}{3n+1}$$

En effet, on peut écrire

$$\frac{n+1}{3n+4} - \frac{n}{3n+1} =$$

$$\frac{(n+1)(3n+1)-n(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)}=$$

$$\frac{\cancel{3n^2}+\cancel{n}+\cancel{3n}+1-\cancel{3n^2}-\cancel{4n}}{(3n+4)(3n+1)}=$$

$$\frac{1}{(3n+4)(3n+1)}>0 \quad \text{car } n\geqslant 1$$

La suite $\frac{n}{3n+1}$ est donc bien croissante.

Tout ceci fait que

$$\min A=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

et $\sup A = \lim \dfrac{n}{3n+1}$

$$= \frac{1}{3},$$

vu que 1 est « négligeable » par rapport à $3n$ à l'∞.