Corrigé de l'exercice 1.2.29

a) Calcul de la dimension de F :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 9 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimension du sous-espace F vaut 2.

b) Calcul de la dimension de G :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 1 & 3 & -1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

La dimension de G vaut donc 3.

c) Calcul de la dimension de $F + G$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimension de $F+G$ vaut donc 3.

d) Calcul de la dimension de $F \cap G$:

Une base de F est donnée par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Une base de G est donnée par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour trouver une base de $F \cap G$, on doit résoudre le système

$$x \cdot u_1 + y \cdot u_2 = z \cdot v_1 + w \cdot v_2 + t \cdot v_3$$

Ce qui revient à

$$x \cdot u_1 + y \cdot u_2 - z \cdot v_1 - w \cdot v_2 - t \cdot v_3 = 0$$

Et donc,

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Il nous faut donc échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & -3 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne, après quelques calculs,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'origine est donc ramené à

$$x = 3\,w + 3\,t \qquad y = 5\,w + 9\,t \qquad z = 3\,w + 3\,t \qquad w = w \qquad \text{et} \qquad t = t$$

Il y a donc deux variables libres, w et t. Cela signifie que l'espace des solutions du système est de dimension 2 et que l'espace vectoriel $F \cap G$ est de dimension 2 également.

Déterminons maintenant une base de $F \cap G$. On sait que tout élément de $F \cap G$ s'écrit de deux façons :

$$x \cdot u_1 + y \cdot u_2 \quad \text{ou bien} \quad z \cdot v_1 + w \cdot v_2 + t \cdot v_3$$

On peut ici choisir l'une des deux façons, disons la deuxième. Vu que $z = 3\,w + 3\,t$, on peut écrire :

$$z \cdot v_1 + w \cdot v_2 + t \cdot v_3 = (3\,w + 3\,t) \cdot v_1 + w \cdot v_2 + t \cdot v_3 = w \cdot (3\,v_1 + v_2) + t \cdot (3\,v_1 + v_3)$$

Une base de $F \cap G$ est donc donnée par $\mathcal{B} = \{a; b\}$ avec $a = 3\,v_1 + v_2$ et $b = 3\,v_1 + v_3$. En composantes :

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 1 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 9 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$