$\boxed{1.2.35}$

On peut travailler dans $\mathbb{R}^4$ avec

$\overline{P_1} = (1, -2, 4, 1)$

$\overline{P_2} = (2, -3, 9, -1)$

$\overline{P_3} = (1, 0, 6 -5)$

$\overline{P_4} = (2, -5, 7, 5)$

et on échelonne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \mathcal{P} = 2$$

On peut poser $S = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

et on vérifie que $S \oplus \mathcal{P} = P_3$

car $S + \mathcal{P} = P_3$ et $S \cap \mathcal{P} = \{0\}$

$S = \langle t, 1 \rangle$ (La base cherchée est $(t, 1)$)