La matrice de f s'écrit :

$$F = \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \; f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>ker(f)</u> : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$, d'après le théorème du rang.

$\Rightarrow f$ est à la fois injective et surjective, donc bijective.

On peut également voir directement que

$$\operatorname{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2.$$

Le fait que $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$

permet également de conclure.