$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & -1 & -ab \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -ab \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

H est de rang $2 \iff a = 1$

(Sinon, H est de rang 3)

Supposons que $a = 1$:

$$H \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -bz \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \ker(H) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a bien $\dim(\ker(H)) = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$, ce qui doit être le cas, vu le théorème du rang.