Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

a) $h(\alpha u + \beta v) \overset{\text{déf}}{=} 3 \cdot (\alpha u + \beta v)$

$\overset{\text{axiome}}{=} 3 \cdot (\alpha u) + 3 \cdot (\beta v)$

$\overset{\mathbb{R}}{=} (3\alpha) u + (3\beta) v$

$\overset{\mathbb{R} \text{ et axiome}}{=} \alpha \cdot (3u) + \beta \cdot (3v)$

$= \alpha \cdot h(u) + \beta \cdot h(v)$

$\Rightarrow$ h est linéaire.

b) $u = x e_1 + y e_2 \quad v = x' e_1 + y' e_2$

$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x') e_1 + (\alpha y + \beta y') e_2$

$h(\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v + (\alpha x + \beta x' - (\alpha y - \beta y')) e_2$

$= \alpha u + \beta v + (\alpha (x - y) + \beta (x' - y')) e_2$

$$= \alpha u + \alpha (x-y) e_2 + \beta v + \beta (x'-y') e_2$$

$$= \alpha \left(u + (x-y) e_2 \right) + \beta \left(v + (x'-y') e_2 \right)$$

$$= \alpha\, h(u) + \beta\, h(v)$$

$\Rightarrow$ h est linéaire.

c) On sait que si h est linéaire, alors

$h(0) = 0$.

Dans le cas qui nous occupe,

$$h(0) = h(0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3)$$

$$= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + e_3 = e_3 \neq 0$$

L'application h n'est pas linéaire dans ce cas.

d) $h(x;y) = (y; -x)$

$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')$

$h(\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y') = (\alpha y + \beta y'; -(\alpha x + \beta x'))$

$= (\alpha y + \beta y'; -\alpha x - \beta x')$

$= (\alpha y; -\alpha x) + (\beta y'; -\beta x')$

$= \alpha (y; -x) + \beta (y'; -x')$

$= \alpha \cdot h(x;y) + \beta \cdot h(x';y')$

$\Rightarrow$ h est bien linéaire.