Soit $f, g \in D_{[a;b]}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) $h(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)'$

$$= (\alpha f)' + (\beta g)'$$

$$= \alpha f' + \beta g'$$

La dérivée est un opérateur linéaire.

b) $h(f+g) = (f+g)' - (f+g)^2$

$$= f'+g' - f^2 - 2fg - g^2$$

$$= f' - f^2 + g' - g^2 - 2fg$$

$$= h(f) + h(g) - 2fg$$

$$\neq h(f) + h(g)$$ si $\left.\begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = 1 \end{array}\right\}$ $x \in [a;b]$

Soit encore $i, j \in \mathcal{D}_{[a;b]}$.

c) $h(\alpha \cdot i + \beta \cdot j) = g$ avec $g(x) = (\alpha \cdot i + \beta j)(a)$
$\forall x \in [a;b]$

$\Rightarrow g(x) = \alpha \cdot i(a) + \beta\, j(a)$

$= \alpha \cdot g_i(x) + \beta \cdot g_j(x) \quad \forall x \in [a;b]$

si $h(i) = g_i$ et $h(j) = g_j$

$\Rightarrow h$ est linéaire, car

$h(\alpha i + \beta j) = g = \alpha \cdot g_i + \beta\, g_j$

$= \alpha\, h(i) + \beta\, h(j)$

d) Soit $0 : [a;b] \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 0$

Soit $g_0 = h(0)$. $g_0 \neq 0$, car $g_0(x) = 0(b) + 1$
et donc $g_0(x) = 1 \quad \forall x \in [a;b]$.

Dans ce cas, h n'est pas linéaire, ou que $h(0) \neq 0$.

e) $h(\alpha \cdot i + \beta \cdot j)(x) = \int_a^x (\alpha \cdot i + \beta j)(t)\, dt$

$\overset{\text{déf.}}{=} \int_a^x \left(\alpha \cdot i(t) + \beta \cdot j(t)\right) dt$

propriétés de l'intégrale

$= \alpha \int_a^x i(t)\, dt + \beta \cdot \int_a^x j(t)\, dt$

$= \alpha\, h(i)(x) + \beta \cdot h(j)(x)$

$\overset{\text{déf.}}{=} (\alpha\, h(i) + \beta\, h(j))(x) \quad \forall x \in [a;b]$

$\Rightarrow h(\alpha i + \beta j) = \alpha\, h(i) + \beta\, h(j)$

et h est un opérateur linéaire sur $D_{[a;b]}$.

f) Soit 0 comme à la question d).

Soit $x \in [a;b]$. On peut écrire

$$h(0)(x) = \int_a^x 0(t)\,dt + 3$$

$$= \int_a^x 0 \cdot dt + 3 = 3$$

$\Rightarrow$ $h(0) \neq 0$ $\Rightarrow$ h n'est pas linéaire.

g) Soit encore 0 comme à la question précédente. Soit $x \in [a;b]$

$$h(0)(x) = e^{0(x)} = e^0 = 1$$

$\Rightarrow$ $h(0) \neq 0$ et h n'est pas non plus linéaire dans ce cas.

h) $h(\alpha i+\beta j)(x) = (\alpha i+\beta j)(x)\cdot e^{x}$

$\overset{\text{déf.}}{=} \left(\alpha\cdot i(x)+\beta\cdot j(x)\right)\cdot e^{x}$

$\overset{\mathbb{R}}{=} \alpha\cdot\left(i(x)e^{x}\right)+\beta\cdot\left(j(x)e^{x}\right)$

$= \alpha\cdot h(i)(x)+\beta\cdot h(j)(x)$

$\overset{\text{déf.}}{=} \left(\alpha\cdot h(i)+\beta\cdot h(j)\right)(x)$

$\Rightarrow h(\alpha i+\beta j) = \alpha h(i)+\beta h(j)$

et h est linéaire.