a) $H = \left(h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right),\ h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right),\ h\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \right)$

$h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

$h\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 5 & 0\end{pmatrix}$

b) $h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} \quad h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (Ce sont les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_1^*$)

On doit maintenant écrire ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}_2^*$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 4y \\ -4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & -5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & \overset{1/12}{\frac{4}{3} - \frac{5}{4}} & 1/3 & -1/4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -19 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -19 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^*}$$

On exprime le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2^*$ en utilisant la même technique :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^*}$$

Ainsi,

$$H^* = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Il s'agit de résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On travaille avec la matrice augmentée du système :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1^*}$$

Vu ce qui précède, l'image de $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1^*}$ dans $\mathcal{B}_2^*$ peut être calculée directement comme ci-dessous:

$$H^* \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -126 \\ -96 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^*}$$