Par définition, h_k est un automorphisme ssi h_k est bijective. On sait que c'est le cas ssi $\det(H_k) \neq 0$.

$$\det(H_k) = \begin{vmatrix} k-1 & 2 & k-3 \\ 5 & k-1 & 3 \\ 7 & k+3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (k-1) \cdot \begin{vmatrix} k-1 & 3 \\ k+3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & k-3 \\ k+3 & 1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & k-3 \\ k-1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4k^2 + 20k - 24 = -4(k^2 - 5k + 6)$$

$$= -4(k-3)(k-2)$$

$\Rightarrow$ h_k est un automorphisme si $k \neq 2, 3$.

Posons maintenant $k=3$.

$$H_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons $\ker(H_3)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$$

On peut donc écrire $\ker(H_3) = \langle (-1; 1; 1) \rangle$

$= \langle (1; -1; -1) \rangle$

Pour trouver l'image de H_3, on utilise le fait suivant : $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

sont les images des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui forment la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour extraire une base de $\mathrm{Im}(H_3)$, il faut donc échelonner la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de $\mathrm{Im}(H_3)$ est $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Vu que $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-21 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on voit bien que $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ est aussi une base de $\operatorname{Im}(H_3)$.

On sait que $\mathcal{B}^*$ est une base

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = -3 + (-7) = -10$$

$$\neq 0$$

Il s'agit donc d'une base.

Reste à déterminer H_3^* :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{B} \arrow[r, "H_3"] & \mathbb{R}^3_{B} \arrow[d, "\underline{P}^{-1}"] \\
\mathbb{R}^3_{B^*} \arrow[u, "\underline{P}"] \arrow[r, "H_3^*"] & \mathbb{R}^3_{B^*}
\end{tikzcd}$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & -1/10 & 3/10 \\ 4/5 & 1/10 & 7/10 \end{pmatrix}$$

Vu le diagramme commutatif ci-dessus, on a :

$$H_3^* = \underline{P}^{-1} H_3 \underline{P}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5 & 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & -1/10 & 3/10 \\ 4/5 & 1/10 & 7/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5 & 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & -1/10 & 3/10 \\ 4/5 & 1/10 & 7/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -14 & 6 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & -41 & 19 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & -41 & 19 \end{pmatrix}$$