$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2$$

$$= ac - a\lambda - c\lambda + \lambda^2 - b^2$$

$$= \lambda^2 - (a+c)\lambda - b^2 + ac = p(\lambda)$$

$p(\lambda)$ admet deux zéros réels ssi

$$(a+c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ac - b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-c)^2 + 4b^2 > 0$$

Ce qui est vrai ssi

$$a \neq c \quad \text{ou} \quad b \neq 0.$$

L'une de ces condition est vraie si la matrice H n'est pas déjà diagonale.
Vu que le fait que $p(\lambda)$ ait deux zéros réels implique que H est diagonalisable permet de conclure.