a) $\begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ m-2 & \frac{4-3m}{2} \end{vmatrix} = (m-1)\,\frac{4-3m}{2} - (m-2)$

$$= \frac{4m - 3m^2 - 4 + 3m}{2} - \frac{2m-4}{2}$$

$$= \frac{-3m^2 + 5m}{2} = -\frac{1}{2}(3m^2 - 5m)$$

$$= -\frac{1}{2}(3m-5)\cdot m$$

On a donc $\det(H_m) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{5}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$

On en déduit que $\mathrm{Im}(h_m) = \mathbb{R}^2$

et $\ker(h_m) = \{0\} \Leftrightarrow m \notin \{0; 5/3\}$

Si $m = 0$, $H_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}(h_0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

et $\ker(h_0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

si $m = \frac{5}{3}$, $H_{5/3} = \begin{pmatrix} 5/3 - 1 & 1 \\ 5/3 - 2 & \frac{4-5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(h_{5/3}) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

$\ker(h_{5/3})$: $2x + 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/2\, y \\ y = y \end{cases}$

$\Rightarrow \ker(h_{5/3}) = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

b) Il faut une valeur propre nulle.

$$\begin{vmatrix} m-1-\lambda & 1 \\ m-2 & \frac{4-3m}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (m-1-\lambda)\left(\frac{4-3m}{2} - \lambda\right) - m + 2$$

$$= \lambda^2 - \lambda + \frac{m}{2}\lambda - \frac{3m^2}{2} + \frac{5m}{2}$$

$$= \lambda^2 + \left(\frac{m}{2} - 1\right)\lambda - \frac{3m^2}{2} + \frac{5m}{2} = p(\lambda)$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_m = \frac{2 - m \pm \sqrt{25m^2 - 44m + 4}}{4}$$

si $m = 0$, on a $\lambda_{m,1} = 1$, $\lambda_{m,2} = 0$;

c'est une projection.

si $m = 5/3$, $\lambda_{m,1} = \dfrac{2 - 5/3 + \sqrt{1/9}}{4} = \dfrac{2 - 5/3 + 1/3}{4}$

$$= 1/6$$

$$\lambda_{m,2} = \frac{2 - 5/3 - 1/3}{4} = 0;$$

c'est une projection composée avec une homothétie.

c) On résout les équations

$$\lambda_{m,1} = \pm 1 \quad \text{et} \quad \lambda_{m,2} = \pm 1$$

et on trouve la valeur $m = 2$ qui donne $\lambda_{m,1} = 1$ et $\lambda_{m,2} = -1$

$$H_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad H_m' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_2 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

L'axe de symétrie est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la direction est la droite $2x + y = 0$ ou $k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.