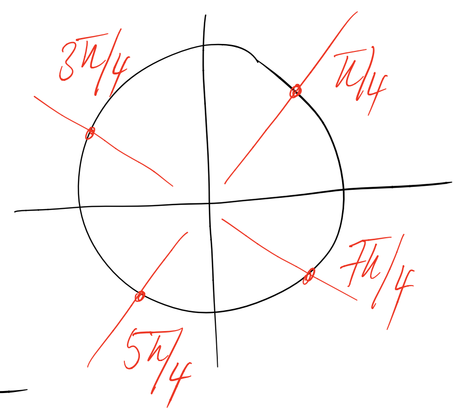
a) $\det(H_\alpha) = \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$

h_α n'est pas bijectif $\Leftrightarrow$ $\det(H_\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^4\alpha = \sin^4\alpha$



$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sin\alpha$

$\boxed{\cos\alpha = \sin\alpha}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$

$\alpha = \frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi$

$\boxed{\cos\alpha = -\sin\alpha}$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{7\pi}{4} + k\cdot 2\pi$

Ce qui revient à demander : $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$

b) $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 - b^2$

$= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2a \pm 2b}{2} = a \pm b$

Les valeurs propres de h_α sont donc

$\lambda_1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\lambda_2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Vu ce qui précède

Pour obtenir une projection, il faut donc

que $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
$k \in \mathbb{Z}$

Ainsi, dès que h_α n'est pas bijectif, c'est une projection.

Vu que $h_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\pi}{4} & \sin^2\frac{\pi}{4} \\ \sin^2\frac{\pi}{4} & \cos^2\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \ker \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_2 = \ker \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

l'axe sur lequel on projette est $k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la direction dans laquelle on projette est $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Vu ce qui précède h_α est une symétrie ssi $\lambda_2 = -1$.

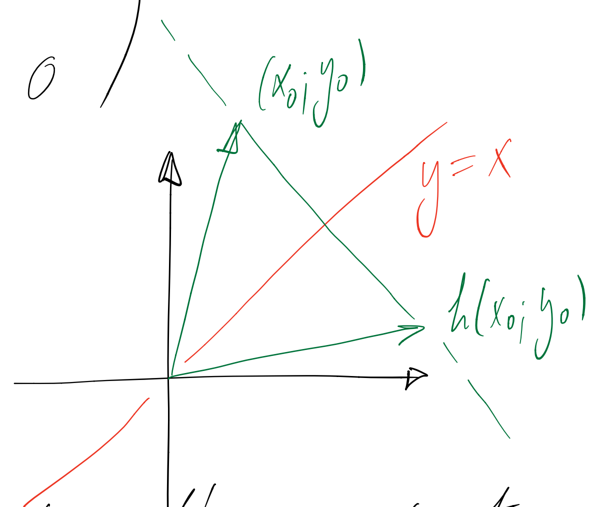
On doit donc avoir $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2\alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\alpha = \pi + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Vu que $H_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$h_{\pi/2}(x;y) = (y;x)$$



Il s'agit de la symétrie d'axe $y=x$ et de direction $y=-x$. On peut diagonaliser $H_{\pi/2}$ pour le voir, mais l'argument géométrique suffit.