a) $\int_1^a 2 \cdot x^{-2} dx = 2 \int_1^a x^{-2} dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} \Big|_1^a$

$= -2 \cdot x^{-1} \Big|_1^a = -2 \left(\frac{1}{a} - 1 \right)$

$= 2 - \frac{2}{a} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 2$

On peut donc écrire :

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = \lim_{a \to +\infty} \left(2 - \frac{2}{a} \right) = 2$$

b) $$\int_a^{-2} (x+1)^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} \cdot (x+1)^{-2} \Big|_a^{-2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left((-2+1)^{-2} - (a+1)^{-2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{(a+1)^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(a+1)^2} \xrightarrow[a \to -\infty]{} -\frac{1}{2}$$

Finalement:

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3} dx = \lim_{a \to -\infty} -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(a+1)^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

c) $$\int_3^a \left(5y^{-3}+y^{-2}\right)dy = \left(5\cdot\frac{1}{-3+1}\cdot y^{-2}+\frac{1}{-2+1}y^{-1}\right)\Bigg|_3^a$$

$$=\left(-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_3^a$$

$$=-\frac{5}{2a^2}-\frac{1}{a}-\left(-\frac{5}{18}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=-\frac{5}{2a^2}-\frac{1}{a}+\frac{11}{18}\xrightarrow[a\to+\infty]{}\frac{11}{18}$$

d) $$\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\,dx}_{1} = \underbrace{\int_0^{1}\frac{x^2+1}{x^2}\,dx}_{2} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\,dx}_{3}$$

Pour que l'intégrale ① converge, il faut que ce soit le cas des deux intégrales ② et ③.

Il suffit de voir que ② diverge pour que ① ne soit pas définie :

$$\int_a^1 \left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = \left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^1 = \left(1-\frac{1}{1}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} - a$$

Vu que $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} \int_a^1 \frac{x^2+1}{x^2}\, dx = \lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} \frac{1}{a} - a = +\infty,$

l'intégrale généralisée ① diverge.

e) $$\int_a^2 \frac{2}{x^2}\, dx = -\frac{2}{x}\Big|_a^2 = -1 + \frac{2}{a}$$

Vu que $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} \int_a^2 \frac{2}{x^2}\,dx = \lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(-1 + \frac{2}{a}\right) = +\infty$,

l'intégrale généralisée ne converge pas.

f) $\int_a^4 t^{-3/2}\,dt = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\, t^{-\frac{3}{2}+1}\Big|_a^4 =$

$-2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^4 = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} =$

$-1 + \frac{2}{\sqrt{a}}$

Vu que $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{a}}\right) = +\infty$,

l'intégrale généralisée diverge.

g) $$\int \frac{3}{z^2+1}\,dz = 3\int \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$= 3\arctan(z)$$

On peut donc écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{z^2+1}\,dz = \lim_{k\to-\infty} \int_k^0 \frac{3}{z^2+1}\,dz + \lim_{l\to+\infty} \int_0^l \frac{3}{z^2+1}\,dz$$

$$= \lim_{k\to-\infty} 3\arctan(z)\Big|_k^0 + \lim_{l\to+\infty} \Big|_0^l 3\arctan(z)$$

$$= \lim_{k\to-\infty} -3\arctan(k) + \lim_{l\to+\infty} 3\arctan(l)$$

$$= -3\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi$$

h) $$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

$x=\pi^2 \Rightarrow t=\pi$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$$t = \sqrt{x} \iff t^2 = x$$

$$dx = 2t\,dt$$

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin t\,dt = -2\cos t\Big|_0^{\pi}$$

$$= -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = 4$$