b) $$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{[(x+1)(x-1)]^2} = \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-1)} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

Vu ce que l'on sait sur la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Déterminons les valeurs des nombres a, b, c et d.

(1) Multiplions par $(x+1)^2$:

$$\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} = b + (x+1)^2 \cdot \left[\frac{a}{x+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}\right]$$

Posons $x=-1$: $$\frac{1}{(-1-1)^2} = b \Leftrightarrow b = 1/4$$

(2) Multiplions par $(x-1)^2$ et posons $x=1$:

$$\frac{1}{(x+1)^2} = d + (x-1)^2 \cdot \left[\frac{a}{x+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \right]$$

$$\frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} = d$$

3 Multiplions par x :

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{ax}{(x+1)} + \frac{cx}{(x-1)} + \underbrace{\frac{x}{4}\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)}$$

$$\downarrow x \to \infty \qquad \downarrow x \to \infty \qquad \downarrow x \to \infty \qquad \downarrow x \to \infty$$

$$0 = a + c \qquad 0$$

$$\Rightarrow \quad c = -a$$

4 Posons $x = 0$:

$$\frac{1}{(1)^2(-1)^2} = a + \frac{(-a)}{-1} + \frac{1}{4}(1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 2a + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right)$$

Ainsi :

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{4} \quad \frac{x-1+x+1}{x^2-1} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2-1} + C$$