$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

Il faut décomposer la fraction en éléments simples. Vu que x^2+1 est irréductible,

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Multiplier par $x+1$, poser $x=-1$ donne a

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = a + \frac{b(x+1)}{x-1} + \frac{(cx+d)(x+1)}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{(-1-1)(1+1)} = a + 0 + 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Multiplier par $x-1$, poser $x=1$

donne b

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a(x-1)}{x+1} + b + \frac{(cx+d)(x-1)}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{(1+1)(1+1)} = 0 + b + 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Multiplier par x, passer à la limite

$$\frac{x}{x^4-1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{1}{4} \frac{x}{x-1} + \frac{cx^2+dx}{x^2+1}$$

Si $x \to +\infty$, on a :

$$0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + c \Rightarrow c = 0$$

Et donc :

$$\frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{d}{x^2+1}$$

Il faut en conséquence :

$$1 = -\frac{1}{4}(x-1)(x^2+1) + \frac{1}{4}(x+1)(x^2+1) + d(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (x^2+1)\left(\cancel{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{4}x} + \frac{1}{4}\right) + d(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (x^2+1) \cdot \frac{1}{2} + dx^2 - d$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}x^2 + dx^2 + \frac{1}{2} - d \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit finalement :

$$\frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

Il est maintenant facile d'intégrer.

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\arctan(x^2+1)$$

$$+C$$