a) On fait le changement de variable

$$(x+1)^2 = 4t^2 \Leftrightarrow x+1 = 2t \Leftrightarrow x = 2t-1$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{x+1}{2}$$

On a donc $dx = 2dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{2\,dt}{4t^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

b) $x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4$

$$= (x-2)^2 + 4 \qquad (\Delta < 0)$$

L'intégrale s'écrit donc :

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+4}$$

On pose $4t^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow 2t = x-2$,

d'où l'on tire : $dx = 2dt$ et $t = \frac{x-2}{2}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{2dt}{4t^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(t) + c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$

car $4x - x^2 = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = 4 - (x-2)^2$

On pose $4t^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow 2t = x-2$, d'où

l'on tire $dx = 2\,dt$ et $t = \frac{x-2}{2}$

On a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{4-4t^2}} = \int \frac{\cancel{2}\,dt}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$