a) $(x-0)^2+(y-2)^2+(z-(-4))^2=5^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$

b) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=r^2 \; : \; \Sigma$

$P(3;2;-1) \in \Sigma \Leftrightarrow (3-1)^2+(2+2)^2+(-1-4)^2=r^2$

$\Leftrightarrow r^2=2^2+4^2+5^2=4+16+25=45$

Ainsi, $\Sigma : (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=45$

Le rayon de Σ vaut $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

c) Le centre de la sphère est M_{AB}, le milieu du diamètre AB.

$$M_{AB}=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{-1+7}{2};\frac{0+4}{2};\frac{5-7}{2}\right)$$

$$=(3;2;-1)$$

Le rayon de la sphère est égal à la moitié de la longueur du diamètre AB :

$$r = \frac{\|\vec{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{8^2+4^2+(-12)^2}}{2}$$

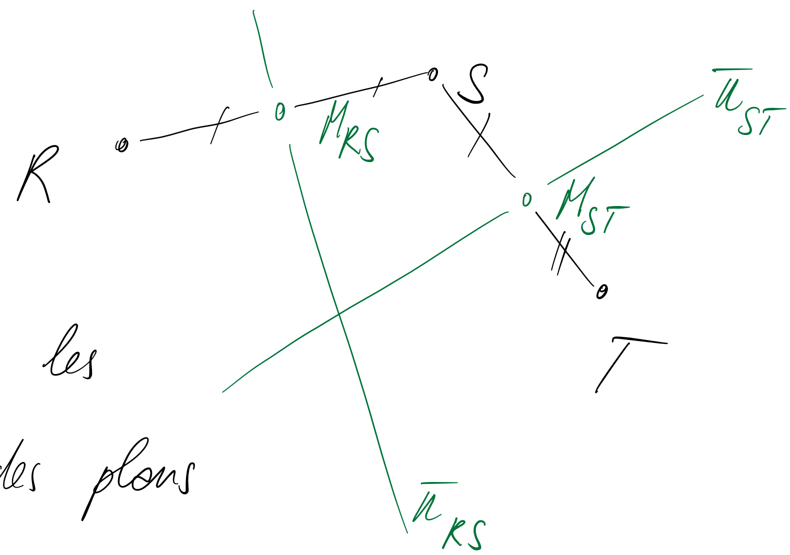
$$= \frac{\sqrt{64+16+144}}{2} = \frac{\sqrt{224}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 56}}{2} = \frac{2\sqrt{56}}{2} = \sqrt{56}$$

L'équation de la sphère est donc :

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 56$$

h)



On cherche les équations des plans médiateurs de R et S et de R et T (resp. π_{RS} et π_{ST}) :

$$M_{RS} = \frac{R+S}{2} = \frac{(-2;6;4)}{2} = (-1;3;2)$$

$$\vec{RS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{RS} : x+y-z+d=0$$

$$M_{RS} \in \pi_{RS} \Rightarrow -1+3-2+d=0 \Rightarrow d=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_{RS} : x+y-z=0}$$

$$M_{ST} = \frac{S+T}{2} = \frac{(-5;9;0)}{2} = \left(-\tfrac{5}{2};\tfrac{9}{2};0\right)$$

$$\vec{ST} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{ST} : 5x - y + 2z + d = 0$$

$$M_{ST} \in \pi_{ST} \Rightarrow -\frac{25}{2} - \frac{9}{2} + d = 0 \Rightarrow d = 17$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_{ST} : 5x - y + 2z + 17 = 0}$$

Pour trouver le centre de la sphère, il faut déterminer l'intersection de π_{RS}, π_{ST} et du plan donné par $x + 3y - 2z - 7 = 0$:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5x - y + 2z = -17 \\ x + 3y - 2z = 7 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & -17 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -17 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - z = 7 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \end{array}$$

Le centre de la sphère est donc $C(-3; 4; 1)$

On peut calculer le rayon comme suit :

$$\|\vec{CS}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2} = 3$$

L'équation de la sphère est donc :

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 9$$

i) Il nous faut les équations des plans médiateurs π_{EF}, π_{FG} et π_{GH} :

$$M_{EF} = (4;4;-1) \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

π_{EF} : $x + 3y - z + d = 0$ par M_{EF}

$4 + 12 + 1 + d = 0$ / $d = -17$

$$\boxed{\Rightarrow \pi_{EF} : x + 3y - z = 17}$$

En utilisant la même méthode, on trouve les deux équations suivantes :

π_{FG} : $8x - 11y - 3z = -84$ $\quad \left(M_{FG} = \left(-1; \frac{13}{2}; \frac{3}{2}\right)\right)$

π_{GH} : $x - 7y - 2z = -41$ $\quad \left(M_{GH} = (-4; 5; 1)\right)$

Il reste à déterminer $C \in \pi_{EF} \cap \pi_{FG} \cap \pi_{GH}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 17 \\ 8 & -11 & -3 & -84 \\ 1 & -7 & -2 & -41 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & -35 & 5 & -220 \\ 0 & 0 & 85 & -170 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le centre de la sphère est donc :

$$C(-3;6;-2)$$

Calculons le rayon : $\vec{CF} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r = \|\vec{CF}\| = \sqrt{65}$

$\Sigma : (x+3)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 65$

j) Trouvons en premier lieu les deux plans médiateurs π_{MN} et π_{NP}

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{MN} : x+y+d=0$$

$$M_{MN} = (7/2 ; 7/2 ; 9) \Rightarrow \boxed{\pi_{MN} : x+y-7=0}$$

$$\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{NP} : 2x+y+d=0$$

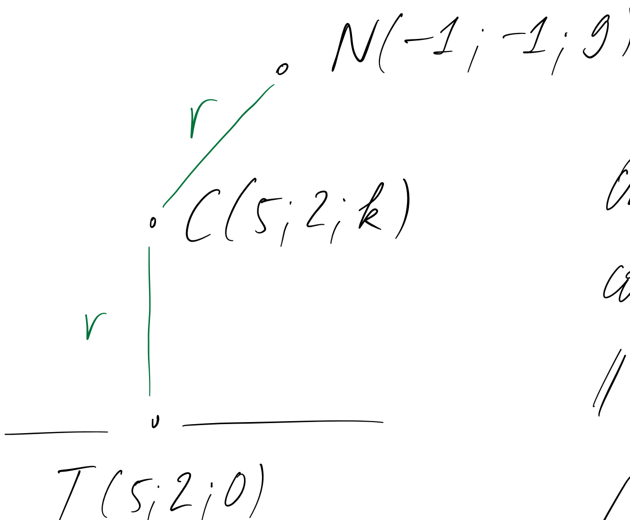
$$M_{NP} = (5 ; 2 ; 9) \Rightarrow \boxed{\pi_{NP} : 2x+y-12=0}$$

La droite $\pi_{MN} \cap \pi_{NP}$ est donc :

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le centre de la sphère est de la forme : $C(5;2;k)$

Vu que la droite sur laquelle se trouve C est verticale, elle est perpendiculaire au sol. Le fait que Σ soit tangente à ce même sol implique donc que le point de tangence est $T(5;2;0)$.



On en tire la condition :

$$\|\vec{NC}\|^2 = \|\vec{TC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{pmatrix}6\\3\\k-9\end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow 36 + 9 + (k-9)^2 = k^2$$

$\Leftrightarrow \quad 45 + \cancel{k^2} - 18k + 81 = \cancel{k^2}$

$\Leftrightarrow \quad 18k = 126 \quad \Leftrightarrow \quad k = 7$

On obtient finalement : $C(5;2;7)$

$r = \|\vec{TC}\| = 7$

$\Sigma : (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2 = 49$