Vu que $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre.

Soit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ et supposons que

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{3x_1 + x_4 = 0} \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_3 - x_4 = 0 \\ -6x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad x_4 = -3x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_3 + 3x_1 = 0 \\ -6x_1 + 4x_3 - 6x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 12x_3 = 0 \\ \boxed{4x_3 = 12x_1} \end{cases} \qquad x_3 = 4x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 32x_1 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 48x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 26x_1 \\ x_2 = -42x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 26x_1 = -42x_1 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

Ce qui montre bien que $\mathcal{F}$ est libre, donc une base.