a) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} x_i \cdot x_j$

b) $\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)$

⚠ On doit démontrer quelque chose !

c) $\sum_{i=1}^{n} y_i - k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

a) Preuve par récurrence sur n :

$\boxed{n=1}$ $\left(\sum_{i=1}^{1} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{1} y_j\right) = x_1 \cdot y_1 = \sum_{\substack{1 \le i \le 1 \\ 1 \le j \le 1}} x_i y_j$

Le cas $n=1$ est donc vérifié.

$\boxed{n \text{ vrai}} \implies \boxed{n+1 \text{ vrai}}$

Supposons que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} x_i \cdot y_j$

On peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j\right) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + y_{n+1}\right) =$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)}_{\sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} x_i y_j} + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot y_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\cdot x_{n+1} + x_{n+1}y_{n+1} =$$

par hypothèse de récurrence

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} x_i y_j + \sum_{1\le i\le n} x_i\cdot y_{n+1} + \sum_{1\le j\le n} x_{n+1}y_j + x_{n+1}y_{n+1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_i y_j + x_i\cdot y_{n+1}\right) + \sum_{j=1}^{n} x_{n+1}y_j + x_{n+1}y_{n+1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} x_i y_j + \sum_{j=1}^{n} x_{n+1} y_j + x_{n+1} y_{n+1} =$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j + \sum_{j=1}^{n+1} x_{n+1} y_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_j + x_{n+1} y_j \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n+1 \\ 1 \le j \le n+1}} x_i y_j$$