a) $\boxed{n=0}$ $8^0-1=1-1=0$

et $7 \mid 0$

divise

hyp. de réc. $\boxed{7 \mid 8^n-1}$

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$

Idée lumineuse ...

$$8^{n+1}-1 = 8^{n+1}\underbrace{-8+8}_{=0}-1$$

$$= 8\cdot(8^n-1)+7$$

hyp. de réc.

$$= 8\cdot 7\cdot k+7 \quad \text{pour } k \text{ entier}$$

$$= 7\cdot(8k+1)$$

$$\Rightarrow 7 \mid 8^{n+1}-1$$

CQFD

b) $\boxed{n=0}$ $3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$ hyp. de réc : $7 \mid (3^{2n+2} - 2^{n+1})$

$$3^{2(n+1)+2} - 2^{n+1+1}$$

$$= 3^{2n+2} \cdot 3^2 - 2^{n+1} \cdot 2^1$$

idée

$$\overset{\text{idée}}{=} 9\,3^{2n+2} \underbrace{- 9 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1}}_{=0} - 2 \cdot 2^{n+1}$$

$$= 9 \cdot \left(3^{2n+2} - 2^{n+1}\right) + 7 \cdot 2^{n+1}$$

hyp de réc.

$$\overset{\text{hyp de réc.}}{=} 9 \cdot k \cdot 7 + 7 \cdot 2^{n+1} = 7\left(9k + 2^{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow 7 \mid \left(3^{2(n+1)+2} - 2^{n+1+1}\right)$$

CQFD

c) $\boxed{n=0}$ $10^2+10^1+1=111$ ✓

hyp. de réc: $\boxed{11 \mid 10^{6n+2}+10^{3n+1}+1}$

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$

$f(n+1)$

$$\boxed{10^{(n+1)+2}+10^{3(n+1)+1}+1}$$

$$= 10^6\cdot 10^{6n+2}+10^3\cdot 10^{3n+1}+1$$

$$= 10^6\cdot\left(10^{6n+2}+10^{3n+1}+1\right) - 10^6\cdot 10^{3n+1} - 10^6 + 10^3\cdot 10^{3n+1}+1$$

$$= 10^6\cdot k\cdot 111 - 999000\cdot 10^{3n+1} - 999999$$

$$= 111\cdot\left(10^6\cdot k - 9000\cdot 10^{3n+1} - 9009\right)$$

$\Rightarrow 11 \mid f(n+1)$ CQFD

d) $\boxed{n=0}$ $\quad 3 \mid 0 = 0^3 + 5 \cdot 0$

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$

hyp. de réc : $\boxed{3 \mid n^3+5n}$

$$(n+1)^3 + 5(n+1)$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$

$$= n^3 + 5n + 3(n^2+n+2)$$

hyp. de réc

$$= 3 \cdot k + 3(n^2+n+2)$$

$$= 3(k+n^2+n+2)$$

$$\Rightarrow 3 \mid \left((n+1)^3 + 5(n+1)\right)$$

CQFD

e) $\boxed{n=0}$ $\quad 2\cdot 0 = 0 = \frac{2}{3}\cdot 0^3 + 0^2 + \frac{1}{3}\cdot 0$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$

hyp. de réc: $\boxed{2 \mid \frac{2}{3}n^3+n^2+\frac{1}{3}n}$

$f(n+1)$

$$\boxed{\frac{2}{3}(n+1)^3+(n+1)^2+\frac{1}{3}(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3}(n^3+3n^2+3n+1) + n^2+2n+1+\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}$$

$$= \cancel{\frac{2}{3}n^3} + 2n^2+2n+\frac{2}{3} + \cancel{n^2} + 2n+1+\cancel{\frac{1}{3}n}+\frac{1}{3}$$

$$= \left(\frac{2}{3}n^3+n^2+\frac{1}{3}n\right) + 2\left(n^2+n+1\right)$$

$$= 2k + 2(n^2+n+1) = 2\cdot j$$

hyp. de réc. $\qquad$ pour j entier

Donc, $f(n+1)$ est pair si $f(n)$ l'est.

CQFD

f) $\boxed{n=0}$ $\quad 11^2+12 = 133$ ✓

hyp. de réc : $\boxed{133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}}$

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$

$$11^{n+1+2} + 12^{2(n+1)+1}$$

$$= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1}$$

$$= 11 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 12^{2n+1} - 11 \cdot 12^{2n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n+1}$$

$$= 11 \cdot \left(11^{n+2} + 12^{2n+1}\right) - 12^{2n+1}(144-11)$$

hyp. de réc.

$$= 11 \cdot k \cdot 133 - 12^{2n+1} \cdot 133$$

$= 133 \cdot j$ avec j entier

Donc $133 \mid \left(11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1}\right)$ CQFD