Prop. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur n que $3 \mid (n^3 - n)$

preuve: $\boxed{n=0}$ $3 \mid 0 = 0^3 - 0$ ✓

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$= n^3 - n + 3(n^2 + n)$$

hyp. de réc.

$$= 3 \cdot k + 3(n^2 + n)$$

$$= 3 \cdot j \Rightarrow (n+1)^3 - (n+1)$$ est multiple de 3 si $n^3 - n$ l'est.

CQFD

Prop. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons directement que $3 \mid n^3 - n$.

preuve : On peut écrire

$$n^3 - n = n(n^2-1)$$
$$= n(n+1)(n-1)$$
$$= (n-1)\,n\,(n+1)$$

Observons que $n-1$, n et $n+1$ sont trois nombres consécutifs.
L'un d'entre eux est donc forcément un multiple de 3.
Leur produit est donc également un multiple de 3.

CQFD