23MS

$\boxed{3.15}$

On met l'équation du cercle sous sa forme standard:

$$x^2+y^2-2x-4y+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2 = -4+1+4$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=1}$$

$C(1;2) \quad r=1$

On trouve maintenant le symétrique du centre du cercle relativement à la droite d'équation $x=y+3 \Leftrightarrow x-y-3=0$

Il nous faut l'équation de la perpendiculaire à $x=y+3$ par C, notée $d_\perp$.

$\boxed{3.15}_2$ 23MS

$d_1: \quad x+y+k=0$

Vu que d_1 passe par C, on a

$$1+2+k=0; \quad k=-3$$

$\Rightarrow \quad d_1: \quad x+y-3=0$

Calculons l'intersection des deux droites:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x-6=0 \\ x=3 \quad \Rightarrow y=0 \end{array}$$

$I=(3;0)$. Le centre du cercle symétrique, noté C', peut être déterminé de la façon suivante:

$$C' = I + \overrightarrow{CI}$$

$\boxed{3.15}_3$ 23MS

$$\overrightarrow{CI} = (3-1\,;\,0-2) = (2\,;\,-2)$$

$$\Rightarrow C' = (3;0) + (2;-2) = (5;-2)$$

L'équation du symétrique du cercle $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ relativement à la droite $x-y-3=0$ est donc

$$(x-5)^2+(y+2)^2=1$$

Le rayon reste le même, vu que la symétrie est une isométrie.

$\boxed{3.16}$ 23MS

a) $(-1)^2 + (2)^2 = 1+4 = 5$ ✓

$\Rightarrow T \in \mathscr{C}$

$\vec{CT} = (-1-0; 2-0) = (-1; 2)$

$t: -x + 2y + k = 0$ passant par T

$\Rightarrow 1+4+k=0 \;/\; k = -5$

$\Rightarrow t: -x+2y-5=0 \Leftrightarrow x-2y+5=0$

b) $(-5+2)^2 + (7-3)^2 = (-3)^2 + 4^2 = 9+16 = 25$ ✓

$\Rightarrow T \in \mathscr{C}$

$t: (-5+2)(x+2) + (7-3)(y-3) = 25$

$\boxed{3.16}_2$

23MS

$\Leftrightarrow \quad -3x - 6 + 4y - 12 = 25$

$\Leftrightarrow \quad -3x + 4y - 43 = 0$ est l'équation de t.

$\Leftrightarrow \quad 3x - 4y + 43 = 0$

c) $\gamma' : x^2 + y^2 - 3x + 7y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{49}{4} = \frac{58}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{58}{4}}$$

$C\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{58}$

$\boxed{3.16}_3$ 23 MS

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{49}{4}=\frac{58}{4}=\frac{29}{2} \checkmark$$

$\Rightarrow T \in \gamma'$

$\overrightarrow{CT}=\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

$\Rightarrow t: -\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}y+k=0$ passant par $(0;0)$

$\Rightarrow k=0 \Rightarrow t: -3x+7y=0$

$\Leftrightarrow \boxed{t: 3x-7y=0}$

d) $\gamma': (x-1)^2+(y+3)^2=29$

$t: (-1-1)(x-1)+(2+3)(y+3)=29$

$\Leftrightarrow -2x+2+5y+15=29$

23 MS

$\boxed{3.16}_4$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 5y + 12 = 0$

L'équation de t est donc $2x - 5y + 12 = 0$

e) $\mathcal{H}: \quad x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 - 2y = 6$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = 6 + \frac{1}{16} + 1$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{113}{16} \qquad C\left(\frac{1}{4}; 1\right)$

$2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 + 3^2 - 2\cdot 3 = 6$

$\Leftrightarrow \quad 4 - 1 + 9 - 6 = 6$

$\Leftrightarrow \quad 3 + 3 = 6 \checkmark \quad \Rightarrow T \in \mathcal{H}$

$\overrightarrow{CT} = \left(2 - \frac{1}{4}; 3 - 1\right) = \left(\frac{7}{4}; 2\right)$

$\Rightarrow t: \frac{7}{4}x + 2y + k = 0$ passant par T

$\boxed{3.16}$ 5

23MS

$$\Rightarrow \frac{7}{4}\cdot 2 + 2\cdot 3 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -6 - \frac{7}{2} = -\frac{19}{2}$$

$$\Rightarrow t: \frac{7}{4}x + 2y - \frac{19}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t: 7x + 8y - 38 = 0$$

f) $\mathcal{K}: \quad x^2 - \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{11}{3}$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{11}{3} + \frac{1}{9} = \frac{34}{9}$$

$$t: \left(2 - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + y = \frac{34}{9}$$

$$\frac{5}{3}x - \frac{5}{9} + y = \frac{34}{9} \Rightarrow 15x + 9y = 39$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t: 5x + 3y = 13}$$

23 MS geoAnaly

$\boxed{3.17}$

On calcule les intersections de la droite et du cercle :

$$\begin{cases} y = 3x-1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(10x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

$$y = 2 \qquad y = -1$$

Equation de la tangente au cercle de centre $C(2;0)$ passant par $I(0;-1)$:

$$2x + y + k = 0 \quad \text{car } \vec{IC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k = 1$; $\boxed{2x + y + 1 = 0}$ est normal à la droite

$\boxed{3.17}_2$ 23 MS geoAnaly

Reste à calculer l'angle entre

$y = 3x - 1$ et $y = -2x - 1$

On sait que $\tan(\varphi) = \left| \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$

Dans notre cas, $m_1 = 3$ et $m_2 = -2$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = \left| \frac{-2-3}{1+3\cdot(-2)} \right| = \left| \frac{-5}{-5} \right|$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(1) = 45°$$

23MS
geoAnaly

$\boxed{3.19}$

$$x^2+y^2+10x=2y-6$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2-25+(y-1)^2-1=-6$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2+(y-1)^2=20$$

Centre $C(-5;1)$ rayon $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Les points de tangence sont donnés par les intersections de la perpendiculaire à la droite $2x+y=7$ passant par le centre du cercle :

$d_\perp : x-2y=k$ passant par $(-5;1)$

$-5-2=k$; $k=-7$; $d_\perp : x-2y+7=0$

$\Rightarrow x=2y-7$ à combiner avec

$$(x+5)^2+(y-1)^2=20$$

$\boxed{3.19}$ 23 MS geoAnaly

2

$$\Rightarrow (2y-7+5)^2+(y-1)^2=20$$

$$\Leftrightarrow (2y-2)^2+(y-1)^2=20$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-8y+4+y^2-2y+1=20$$

$$\Leftrightarrow 5y^2-10y-15=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-2y-3=0$$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y+1)=0$$

$$\Rightarrow y=3 \text{ ou } y=-1$$

Les points de tangence sont donc :

$(-1;3)$ et $(-9;-1)$

$\boxed{3.19}_3$ 23MS geoAnaly

On peut maintenant déterminer les équations des parallèles à $2x+y=7$ passant par $(-1;3)$ et $(-9;-1)$.

$d_{//}: 2x+y=k$ par $(-1;3)$

$\Rightarrow -2+3=k$; $k=1$

$\Rightarrow \boxed{2x+y-1=0}$

$d_{//}: 2x+y=k$ par $(-9;-1)$

$\Rightarrow -18-1=k$; $k=-19$

$\Rightarrow \boxed{2x+y+19=0}$

$\boxed{3.21}$

$$x^2+y^2=19-2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+2x+y^2-19=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2-1+y^2-19=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+y^2=20$$

$C(-1;0)$ et $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Calcul des tangentes: $y=mx+h$

$A(1;6)$ est sur la tangente, ce qui implique $6=m+h$; $\boxed{h=6-m}$

La distance entre C et la tangente vaut $2\sqrt{5}$:

$$\mathrm{dist}\big((-1;0);\, y-mx-h=0\big)=2\sqrt{5}$$

23 MS geoAnaly

$\boxed{3.21}$ 2

$$\Rightarrow \quad \frac{|0-(-1)\cdot m-(6-m)|}{\sqrt{1+m^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|2m-6|}{\sqrt{1+m^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad (2m-6)^2 = 4\cdot 5\cdot(1+m^2)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{4m^2}-24m+36 = 20+\cancel{20m^2}$$

$$\Rightarrow \quad 16m^2+24m-16=0$$

$$\Rightarrow \quad 2m^2+3m-2=0\ ; \ (2m-1)(m+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad m = 1/2\ ; \ m' = -2$$

Les équations des tangentes sont donc

$$y = \frac{1}{2}x + h' \quad \text{et} \quad y = -2x + h$$

23 MS geoAnaly

$\boxed{3.21}_3$

Pour trouver h et h', on utilise le fait que A est sur les tangentes, à savoir $h' = 6 - m'$ et $h = 6 - m$

$\Rightarrow \quad h = 6 - (-2)$ et $h' = 6 - \frac{1}{2}$
$\quad = 8 \qquad\qquad\qquad = \frac{11}{2}$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \Rightarrow \boxed{2y = x + 11}$

$\Rightarrow \quad y = -2x + 8 \Rightarrow \boxed{2x + y = 8}$

$\boxed{3.22}$

23MS geoAnaly

$$x^2+y^2-2x+4y=20$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2-1-4=20$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=25=5^2$$

$$C(1;-2) \quad r=5$$

Soit $t: y=mx+h$ l'équation de la tangente. On écrit les conditions permettant de déterminer m et h:

$$A\in t \Rightarrow 5=6m+h$$

$$\Leftrightarrow h=5-6m$$

$\text{dist}(C;t)=5$ donne l'autre équation.

$\boxed{3.22}_2$ 23 MS geoAnaly

$$\frac{|y - mx - h|}{\sqrt{1+m^2}} = r$$ avec $h = 5-6m$ et $(x;y) = C$, $r=5$

$$\Rightarrow \frac{|-2 - m \cdot 1 - (5-6m)|}{\sqrt{1+m^2}} = 5$$

$$\Rightarrow |5m - 7| = 5\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow (5m-7)^2 = 25(1+m^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{25m^2} - 70m + 49 = 25 + \cancel{25m^2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$$

$$h = 5 - 6 \cdot \frac{12}{35} = \frac{103}{35}$$

$t_1 : y = \frac{12}{35}x + \frac{103}{35}$ $\qquad t_2 : x = 6$

$\boxed{3.22}_3$ 23 MS geoAnaly

La deuxième tangente t_2 est d'équation $x = 6$ car la différence entre la première coordonnée de A et la première coordonnée de C vaut exactement $5 = r$. La tangente t_2 doit alors forcément être verticale.

Calcul des points de contact:

T_2: $5^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow y = -2$

$\Longrightarrow T_2(6; -2)$

T_1: On détermine l'équation de la perpendiculaire à t_1 par C:

$$y = -\frac{35}{12}x + h \; ; \; -2 = -\frac{35}{12} + h$$

$$h = -\frac{11}{12}$$

$\boxed{3.22}_4$ 23 MS geoAnaly

$\Rightarrow \quad 35x + 12y = 11$ est l'équation cherchée.

Il suffit maintenant de calculer l'intersection de la droite t_1 avec la perpendiculaire à t_1 par C :

$$\begin{cases} 35y - 12x = 103 \\ 35x + 12y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -420x + 1225y = 3605 \\ 420x + 144y = 132 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1369y = 3737 \Rightarrow y = \frac{101}{37}$$

$$\Rightarrow x = \left(132 - 144 \cdot \frac{101}{37}\right) \cdot \frac{1}{420} = -\frac{23}{37}$$

$$\Rightarrow T_1 = \left(-\frac{23}{37} ; \frac{101}{37}\right)$$