MATHÉMATIQUES III

École de maturité

GYMNASE DE BURIER

Table des matières

v. 1.6180339887 – Juin 2023

Chapitre 1

Analyse

1.1 Exponentielles et logarithmes

1.1.1 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{5x}$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = e^{1/x}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

e) $f(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

f) $f(x) = e^{\sin(x)}$

g) $f(x) = x^2\, e^x$

h) $f(x) = e^{-x}\, \cos(x)$

1.1.2 Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x) = x\, e^x$.

1.1.3 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = 2 - e^x$

d) $f(x) = e^{2-x}$

1.1.4 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 e^x\, dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 e^{3\,x-7}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\, e^x\, dx$

f) $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} x^2\, e^x\, dx$

1.1.5 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\, e^x}{1-e^x}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\, e^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\, e^x - 1}{e^x + 2}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + x)\, e^x$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 - 2x + 3}$

1.1.6 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(5x)$

b) $f(x) = \ln(x-1)$

c) $f(x) = \ln(1-x)$

d) $f(x) = \ln(\mid 1-x \mid)$

e) $f(x) = \ln(x^2 - x)$

f) $f(x) = \ln(x - x^2)$

g) $f(x) = \ln(\mid x^2 - x \mid)$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

i) $f(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$

j) $f(x) = \ln(3\, x^5)$

k) $f(x) = x\ln(x) - x$

l) $f(x) = \ln(\mid \cos(x) \mid)$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

1.1.7 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$

d) $f(x) = x^2 + x + 1 + \dfrac{3}{5x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$

f) $f(x) = \tan(x)$

1.1.8 Lorsqu'elles sont définies, calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} \frac{dx}{x}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{x}$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{2x+3}$

e) $\displaystyle\int_2^6 \frac{8x^3+19x^2+15x+4}{x^2+2x+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\,dx$

1.1.9 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\ln(x)-1}{x-e}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{2-x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)+1}{1-\ln(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$

1.1.10 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log_2(2x+3)$

b) $f(x) = \log_3(x^2-2x+1)$

c) $f(x) = 3^{2x-4}$

d) $f(x) = \exp_2(\sqrt{x^2+1})$

1.1.11 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8^x-2^x}{4x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\log_5(x+2)}{x+1}$

1.1.12 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 4^x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \exp_2(x^2)\;x\,dx$

1.1.13 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = e^{1/x}$

c) $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$

d) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

e) $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$

f) $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$

1.1.14 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$

f) $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$

1.1.15 Soit les courbes $\gamma_1 : y = e^{-x}$ et $\gamma_2 : y = e^{-x}\cos(x)$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes γ_1 et γ_2 sur $[-\pi; 3\pi]$.

b) Prouver qu'en chacun de ces points, γ_1 et γ_2 sont tangentes.

1.1.16 Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = 3^x$ en son point d'intersection avec l'axe Oy.

1.1.17 De l'origine, on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Déterminer l'équation de cette tangente, ainsi que les coordonnées de son point de contact avec la courbe.

1.1.18 Soit E et F les points d'inflexion de la courbe $y = \ln(x^2 + 1)$. On fait tourner le morceau de surface limité par le segment EF et la courbe autour de Oy. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

1.1.19 Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur Ox, alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.

1.1.20 Soit la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$. Déterminer a et b afin que le graphe de la fonction f soit tangent à l'axe Ox en $x = 1$.

1.1.21 Soit les fonctions $f(x) = (x+1)\,e^{-x}$ et $g(x) = -e^{x} + a$. Déterminer a de sorte que les graphes de f et g se coupent en l'extremum de f.

1.1.22 Déterminer les coordonnées d'un point P de la courbe $y = 2\ln(x)$ $(x \geq 1)$ de sorte que le triangle délimité par la normale en P à la courbe, la verticale passant par P et l'axe Ox soit d'aire maximale. Calculer cette aire.

1.1.23 Considérons les fonctions $f(x) = (x-1)\,e^{x}$ et $g(x) = -e^{x-a} + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer a et b de telle manière que les graphes de f et g se coupent au point d'abscisse 1 à angle droit.

1.1.24 Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(1 + \ln(x))^2}{x}$$

Déterminer la valeur du nombre réel $k > 1$ pour laquelle l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = k$ et $y = 0$ soit égale à $8/3$.

1.1.25 On fait tourner autour de l'axe Ox la surface située sous la courbe $y = 2^{-x}$ et comprise entre les droites $x = -1$ et $x = 1$. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

1.1.26 Sous quel angle les courbes $y = e^{x+2}$ et $y = e^{-x}$ se coupent-elles ?

1.1.27 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20\ln(t+1) + t}{t+1} \qquad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1$^{\text{er}}$ mois).

a) Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?

b) Si l'abonnement est conclu le 1$^{\text{er}}$ janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?

c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

1.1.28 Dans une école, une étude a montré que le degré d'intérêt (sur une échelle de 1 à 10) des élèves au cours d'une leçon de 45 minutes est donné par la fonction d définie par

$$d(t) = \frac{t \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 2}{2}$$

où t représente le nombre de minutes écoulées depuis le début de la leçon.

a) Quel est le degré de motivation des élèves en entrant en classe ?

b) Quel est le degré de motivation des élèves après 20 minutes en classe ?

c) Après combien de minutes le degré maximal est-il atteint ? Donner sa valeur maximale.

1.1.29 La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique. Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h = \frac{40}{1 + 200\, e^{-0,2t}}$$

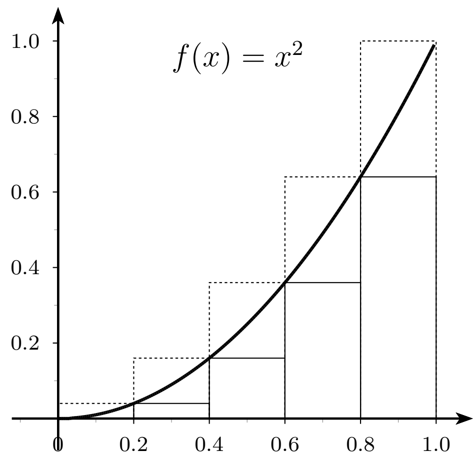
a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

1.2 Approche géométrique de l'aire sous une courbe

1.2.1 Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$.
On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction représentative de $f(x)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Pour cela, subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles d'égale longueur.



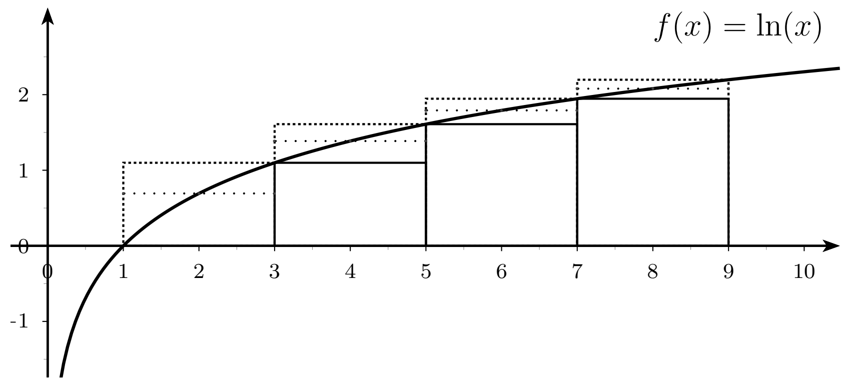
a) Estimer A à l'aide de la somme u_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessous de la courbe (le premier rectangle est d'aire nulle), puis à l'aide de la somme v_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessus de la courbe.

b) Améliorer l'estimation de A en subdivisant l'intervalle $[0;1]$ en 10 intervalles d'égale longueur.

c) Calculer u_n et v_n en subdivisant l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles d'égale longueur.

d) Calculer la valeur exacte de A en utilisant les suites u_n, v_n et le théorème des deux gendarmes.

1.2.2 Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[1;9]$. En subdivisant cet intervalle en quatre sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.



1.2.3 Considérer la fonction $f(x) = e^x + 1$ sur l'intervalle $[-1;2]$. En subdivisant cet intervalle en six sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.

1.2.4 En utilisant une somme de Riemann, trouver une approximation de l'aire sous la courbe $y = x^2 + 1$ entre les verticales $x = 0$ et $x = 2$.

1.2.5 En utilisant une somme de Riemann pour laquelle l'intervalle considéré est divisé en quatre sous-intervalles et où l'on considère le point milieu de chacun de ces sous-intervalles, trouver une valeur approximative de

$$\int_1^3 \frac{8}{x}\, dx$$

1.3 Primitives et intégrales

1.3.1 Pour chacune des questions ci-dessous, montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$:

a) $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}$ et $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$;

b) $F(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{2 - x^2} + 7$ et $f(x) = \dfrac{6x}{(2 - x^2)^2}$;

c) $F(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x + 1}} - 11$ et $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{(x + 1)^3}}$;

d) $F(x) = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{2\sqrt{1 - x^2}}$.

1.3.2 Vérifier les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{4} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int \left(4x^2 - \frac{7}{3} - \frac{14}{3x^3}\right) dx = \frac{4x^5 - 7x^3 + 7}{3x^2} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\int \frac{2x + 7}{\sqrt[3]{(x^2 + 7x + 2)^4}}\, dx = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^2 + 7x + 2}} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

1.3.3 Calculer :

a) $\displaystyle\int 3\, dx$

b) $\displaystyle\int 5x\, dx$

c) $\displaystyle\int (2x + 1)\, dx$

d) $\displaystyle\int (5x - 4)\, dx$

e) $\displaystyle\int (2x^2 - 3x + 2)\, dx$

f) $\displaystyle\int 5x^3\, dx$

g) $\displaystyle\int (-3x^4)\, dx$

h) $\displaystyle\int (3x^5 + 2x^4 - 1)\, dx$

i) $\displaystyle\int (\cos(x) + \sin(x))\, dx$

j) $\displaystyle\int (1 + \tan^2(x))\, dx$

1.3.4 Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$

b) $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^3}$

c) $\displaystyle\int \frac{-7dx}{x^5}$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

h) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^4} - \sqrt[4]{x^3}\right) dx$

1.3.5 Calculer :

a) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

c) $\displaystyle\int (x+3)^3\,dx$

d) $\displaystyle\int (2x-1)^2\,dx$

e) $\displaystyle\int (7x-2)^5\,dx$

f) $\displaystyle\int (3x^2+x)^3(6x+1)\,dx$

g) $\displaystyle\int (4x^2+3)^4 x\,dx$

h) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{x+3}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

l) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

1.3.6 Calculer :

a) $\displaystyle\int (3x^2-2x+3)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^4-3x^2-7}{4x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int 7\sqrt[4]{x^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\,dx$

e) $\displaystyle\int (2\sin(x) - 3\cos(x))\,dx$

f) $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\cos^2(x)} + 5\cos(x)\right) dx$

h) $\displaystyle\int \left(8\sin(x) + \frac{4}{\sqrt{2x}}\right) dx$

i) $\displaystyle\int (3x^2-7)^2\,dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x^2-5)\,dx$

k) $\displaystyle\int (3x-5)^6\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{12}{(4-3x)^4}\,dx$

m) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(3x-8)^2}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{6}{\cos^2(3x)}\,dx$

o) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

p) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}\,dx$

1.3.7 Trouver l'expression mathématique de la fonction f, sachant que :

a) $f'(x) = 3x^2 - 4,\ f(5) = 54$;

b) $f''(x) = (x+1)(x-2),\ f(1) = 8,\ f'(0) = 37/6$;

c) $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ f'(9) = 2,\ f(1) = 2f(4)$.

1.3.8 Déterminer la primitive F de chaque fonction f ci-dessous, en tenant compte des conditions imposées.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ et le terme constant de F est égal à 7 ;

b) $f(x) = \dfrac{18}{x^2} + \sqrt{x}$ et le graphe de F passe par le point $(9; 16)$;

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x \le 4, \\ 6-x & \text{si } x > 4 \end{cases}$ avec $F(0) = 1$.

1.3.9 Déterminer la fonction f sachant qu'elle admet pour asymptote la droite

$$x - 2\,y + 8 = 0$$

et que

$$f''(x) = -\frac{8}{x^3}$$

1.3.10 Calculer :

a) $\displaystyle\int_1^4 (x^2-2x+3)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^3+3x^2+2x-1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x+1}\, dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(x)\, dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(x))\, dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{2} (1+2x)^3\, dx$

g) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\, dx$

1.3.11 Sachant que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 3$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx = 4$ et $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx = -8$, calculer :

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 3f(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^3 8f(x)\, dx$

d) $\displaystyle\int_3^1 2f(x)\, dx$

1.3.12 Montrer que pour une fonction f continue sur $[-a; a]$, on a :

a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ lorsque f est paire ;

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ lorsque f est impaire.

1.3.13 Déterminer les réels k pour lesquels on a :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} kx^2\, dx = \frac{2}{3}$

b) $\displaystyle\int_{4}^{k} (x^2-3x+7)\, dx = \frac{129}{2}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{k/2} \cos(t)\, dt = \frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\int_{k}^{0} \frac{2}{(x+1)^3}\, dx = -\int_0^k \frac{3}{(x+3)^2}\, dx$

1.3.14 Déterminer la nature des extremums des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (t^3-t)\, dt$

b) $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{t+1}\, dt$

1.3.15 Calculer les intégrales définies suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x+6}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}(x+2)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)\,\cos(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_2^{\sqrt{20}} 3x\sqrt{x^2+5}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{5x-2}{x^2-x}\,dx$

1.3.16 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, et $x = b$:

a) $f(x) = 9 - x^2, \quad a = -4,\ b = 4\,;$

b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - 1, \quad a = 1,\ b = 4\,;$

c) $f(x) = \cos(3x), \quad a = 0,\ b = \dfrac{\pi}{2}\,;$

d) $f(x) = \sqrt{2x-4}, \quad a = 2,\ b = 10.$

1.3.17 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = -x^2 + 6\mid x\mid + 7$

1.3.18 Déterminer la valeur du nombre réel positif c pour que l'aire du domaine plan limité par l'axe Ox et la parabole d'équation $y = c\,(x^2-1)$ soit égale à 5.

1.3.19 Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des fonctions f et g :

a) $f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = 2x$

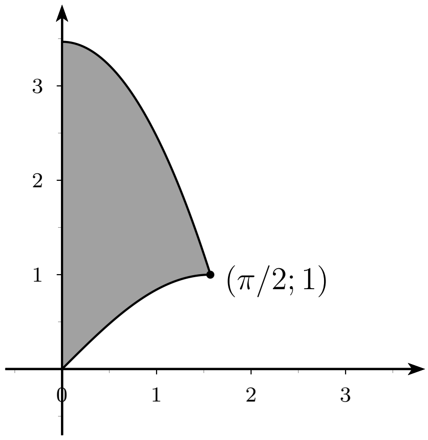
b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 8 - x^2$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x, \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

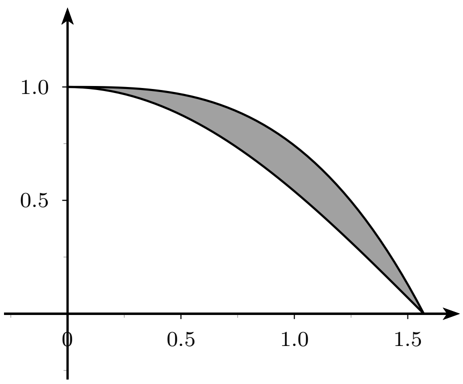
d) $f(x) = x(6 - 2x^2), \quad g(x) = x(2 - x^2)$

1.3.20 Calculer d'abord la valeur du paramètre a, puis l'aire du domaine grisé.

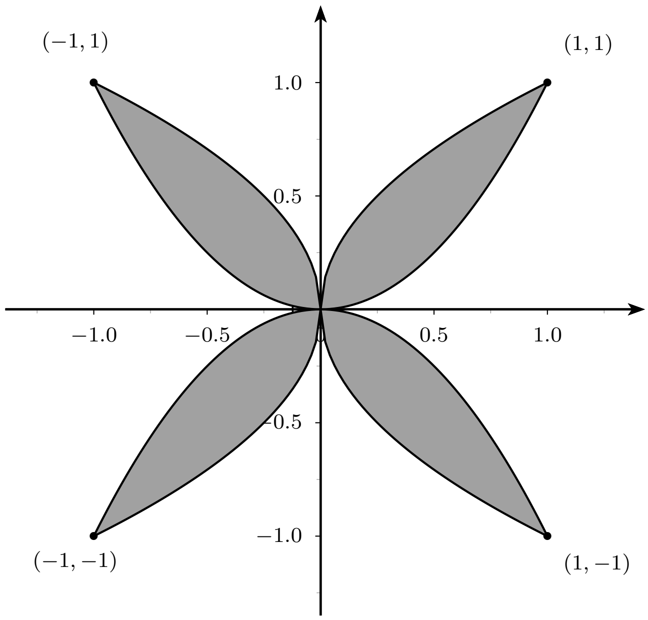
a) $y = \sin(x), \quad y = -x^2 + a$



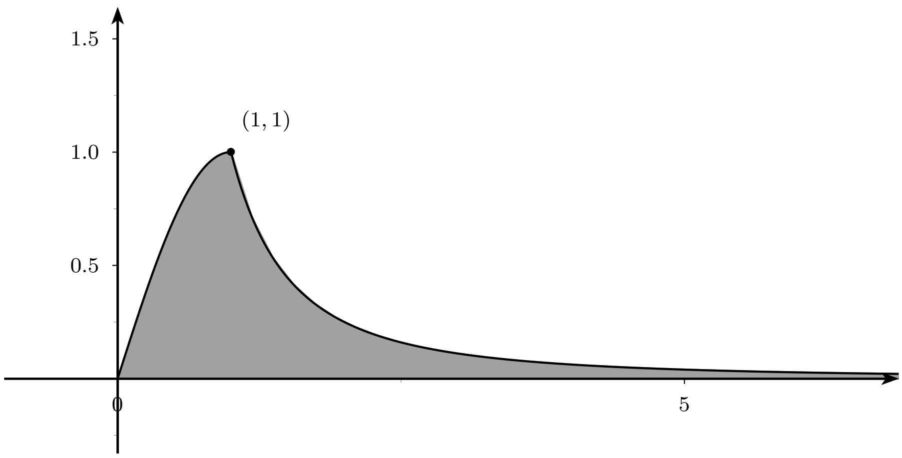
b) $y = \cos(x), \quad y = ax^3 + 1$



c) $y^2 = ax^4, \quad x^2 = y^4$



d) $y = \sin(ax), \quad y = \dfrac{1}{x^2}$



1.3.21 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y = x^2, \quad y = -1, \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 5$$

1.3.22 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y^2 = 4 - x \quad \text{et} \quad y^2 = 4 + x$$

1.3.23 Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les courbes $y = \dfrac{1}{4}x^2$ et $y = mx$ soit égale à 9.

1.3.24 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume, sachant que :

a) $f(x) = x^2 + 2\,x$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

1.3.25 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $x = y^2 - 2$ et la droite $y = x$,

a) en prenant x comme variable d'intégration ;

b) en prenant y comme variable d'intégration.

1.3.26 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume :

a) $f(x) = x + 1, \qquad a = 1,\, b = 3$

b) $f(x) = x^2, \qquad a = 0,\, b = 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \qquad a = 1,\, b = 2$

d) $f(x) = \cos(x), \qquad a = -\dfrac{\pi}{2},\, b = \dfrac{\pi}{2}$

1.3.27 Le domaine borné délimité par la courbe d'équation

$$y = k\,(1 - k\,x)\,\sqrt{x}$$

pour $k > 0$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Montrer que le volume du corps ainsi obtenu est indépendant de la valeur du paramètre k.

1.3.28 Le domaine délimité par les courbes d'équations $y = f(x)$, $y = g(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume :

a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 - 2\,x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

1.3.29 La base d'un solide est le disque du plan Oxy centré à l'origine et de rayon 1. Chaque section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est un disque. Après avoir montré que l'aire de la section située à l'abscisse x vaut $A(x) = \pi\,(1 - x^2)$, en déduire par calcul le volume de ce solide.

1.3.30 Les axes de coordonnées et la parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le premier quadrant. Déterminer l'équation de la droite verticale (valeur approchée) qui partage ce domaine en deux parties de même aire.

1.3.31 On considère le domaine plan limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$. Poser le calcul permettant de déterminer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de :

a) l'axe Ox ;

b) l'axe Oy ;

c) la droite $x = 1$;

d) la droite $x = 2$;

e) la droite $y = 3$;

f) la droite $y = 6$.

1.3.32 La base d'un solide est délimitée par les courbes d'équations

$$x = y^2 \quad \text{et} \quad x = 9$$

Calculer le volume de ce solide, sachant que chaque section de celui-ci par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est :

a) un carré ;

b) un demi-cercle ;

c) un triangle équilatéral ;

d) un trapèze dont la base supérieure mesure la moitié de la base inférieure et dont la hauteur mesure le quart de la base inférieure.

1.3.33 Calculer l'aire du domaine compris entre les droites $x = 1$ et $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

1.4 Solutions des exercices

Exponentielles et logarithmes

1.1.1

a) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5\,e^{5\,x}$

b) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\,x\,e^{x^2}$

c) $D_f = \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

d) $D_f =]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot e^{\sqrt{x^2+x}}$

e) $D_f =]-1;1[, \quad f'(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} \cdot e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$

f) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x)\,e^{\sin(x)}$

g) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = (x^2+2x)e^x$

h) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = -(\cos(x)+\sin(x))\,e^{-x}$

1.1.2 $\quad f^{(n)}(x) = e^x\,(x+n)$

1.1.3

a) $2e^x + c$

b) $\dfrac{1}{2}e^{2x} + c$

c) $2x - e^x + c$

d) $-e^{2-x} + c$

1.1.4

a) $e^2 - e$

b) $\dfrac{e^3-1}{3\,e^4}$

c) $\dfrac{e^4-1}{2}$

d) $-2\,(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1})$

e) 1

f) $2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 4 - e$

1.1.5

a) e^2

b) 1

c) -1

d) $+\infty$

e) $-\infty$

f) 2

g) 0

h) $+\infty$

1.1.6

a) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $D_f =]1;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

c) $D_f =]-\infty;1[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

e) $D_f =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

f) $D_f =]0;1[, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

g) $D_f = \mathbb{R}^*\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

h) $D_f =]-\infty;1[\backslash\{0\}, \quad f'(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x}$

i) $D_f =]-\sqrt{3};\sqrt{3}[, \quad f'(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$

j) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{5}{x}$

k) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \ln(x)$

l) $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad f'(x) = -\tan(x)$

m) $D_f = \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$

n) $D_f = \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}, \quad f'(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2\ln^2(x)}$

1.1.7

a) $F(x) = \ln|x+1| + c$

b) $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln|3x+2| + c$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 4| + c$

d) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{3}{5}\ln|5x-1| + c$

e) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + \ln|x-1| + c$

f) $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$

1.1.8

a) $\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

b) $\ln(3)$

c) non définie

d) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right)$

e) $140 + \ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$

f) $\ln(2)$

1.1.9

a) 1

b) $-1/2$

c) $1/e$

d) -4

e) 0

f) -1

g) 0

h) 0

1.1.10

a) $D_f = \left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[, \quad f'(x) = \dfrac{2}{(2x+3)\ln(2)}$

b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)\ln(3)}$

c) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\ln(3)\,e^{(2x-4)\ln(3)}$

d) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{x\ln(2)}{\sqrt{x^2+1}}\, e^{\ln(2)\sqrt{x^2+1}}$

1.1.11

a) $\dfrac{\ln(2)}{2}$

b) $\dfrac{1}{\ln(5)}$

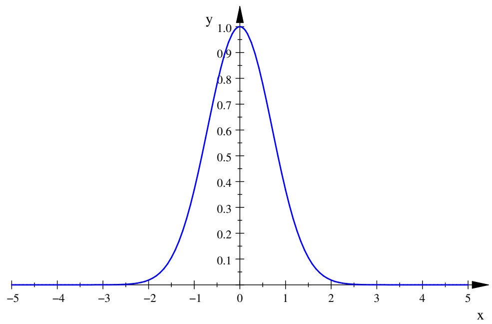
1.1.12

a) $\dfrac{30}{\ln(2)}$

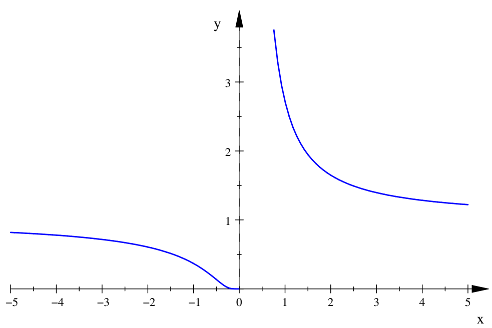
b) 0

1.1.13

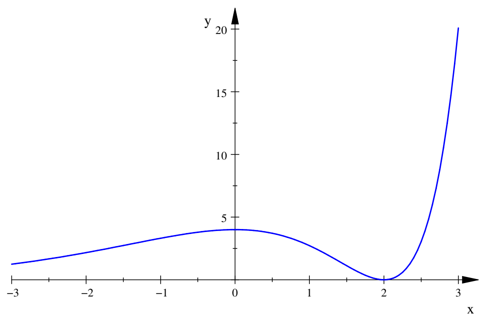
a) $D_f = \mathbb{R}$
Paire
Pas de zéro
AH : $y = 0$
$\delta(x) = e^{-x^2}$
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$
Max (0 ;1)
$f''(x) = -2e^{-x^2}(1-2x^2)$
PI(-$\sqrt{2}/2$;$e^{-1/2}$), PI($\sqrt{2}/2$;$e^{-1/2}$)



b) $D_f = \mathbb{R}^*$
Pas de parité
Pas de zéro
Point limite : $(0; 0)$ (à gauche)
AV : $x = 0$ (à droite)
AH : $y = 1$
$\delta(x) = e^{1/x} - 1$
$f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
$f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$
PI($-1/2$;$1/e^2$)

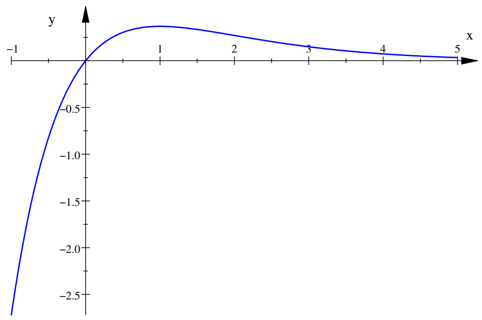


c) $D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = 2$
AH : $y = 0$ (vers $-\infty$)
$f'(x) = x(x-2)e^x$
Max (0 ;4) et Min (2 ;0)
$f''(x) = e^x(x^2-2)$
PI($-\sqrt{2}$;$(6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$)
et PI($\sqrt{2}$;$(6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$)



d)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = 0$
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = (1-x)e^{-x}$
Max (1 ;1/e)
$f''(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$
PI(2 ;2/e^2)



e)

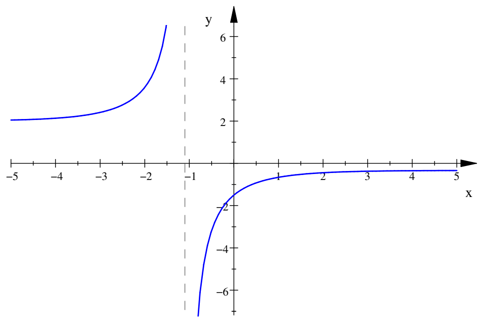
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\ln(3)\}$
Pas de parité
Pas de zéro
AV : $x = -\ln(3)$

$$\text{AH} : y = \begin{cases} 2 & (\text{vers } -\infty) \\ -1/3 & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{7e^x}{1-3e^x} & (\text{vers } -\infty) \\ \dfrac{7}{3(1-3e^x)} & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$$

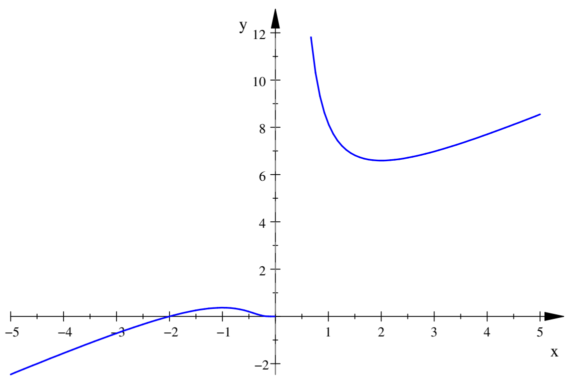
$$f'(x) = \frac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{7e^x(3e^x+1)}{(1-3e^x)^3}$$



f)

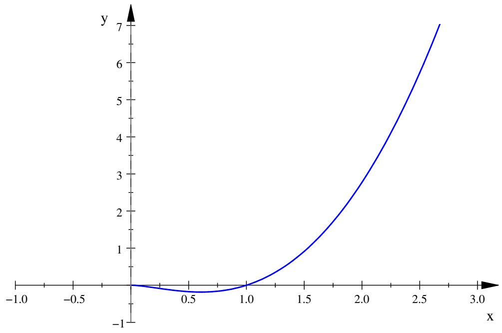
$D_f = \mathbb{R}^*$
Pas de parité
Zéro : $x = -2$
Point limite : $(0;0)$ (à gauche),
AV : $x = 0$ (à droite) ; AO : $y = x + 3$
$\delta(x) = (x+2)e^{1/x} - x - 3$
$f'(x) = \dfrac{e^{1/x}(x^2-x-2)}{x^2}$
Max(-1 ;1/e) et Min(2 ;4$\sqrt{e}$)
$f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(5x+2)}{x^4}$
PI(-2/5 ;8/5$e^{-5/2}$)



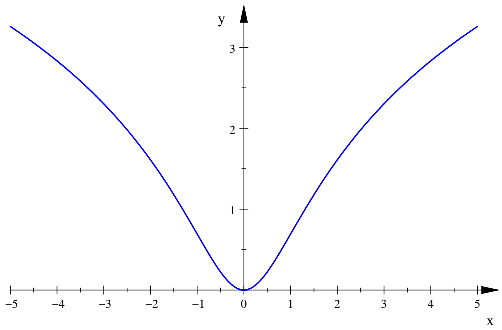
1.1.14

a)

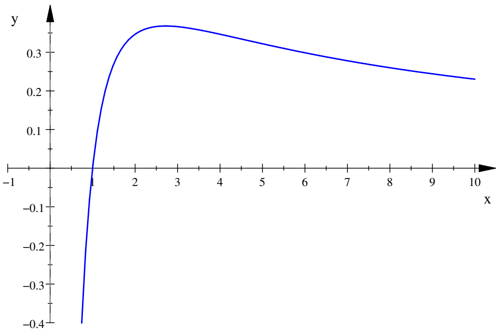
$D_f = \mathbb{R}_+^*$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
Pas d'asymptote,
point limite : $(0; 0)$ (à droite)
$f'(x) = x(2\ln(x) + 1)$
Min($e^{-1/2}$;-$1/2e^{-1}$)
$f''(x) = 2\ln(x) + 3$
PI($e^{-3/2}$;-$3/2e^{-3}$)



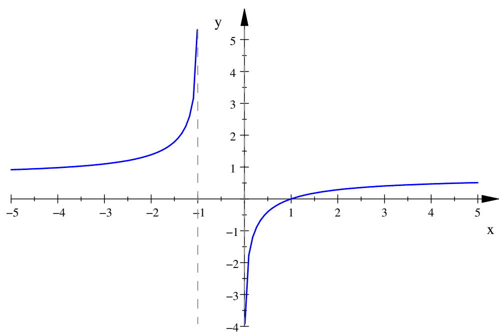
b) $D_f = \mathbb{R}$
Paire
Zéro : $x = 0$
Pas d'asymptote
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
Min $(0; 0)$
$f''(x) = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$
PI$(-1\,;\ln(2))$ et PI$(1\,;\ln(2))$



c) $D_f = \mathbb{R}_+^*$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
AV : $x = 0$ (à droite)
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$
Max $(e; 1/e)$
$f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$
PI($e^{3/2}$;$3/2e^{-3/2}$)

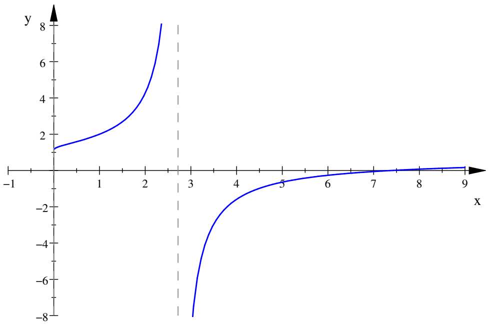


d) $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
AV : $x = -1$(à gauche) et $x = 0$ (à droite)
AH : $y = \ln(2)$
$\delta(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
$f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$
$f''(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$

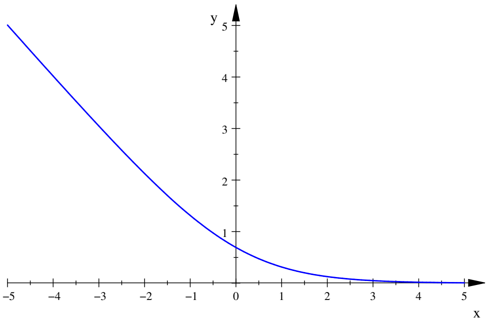


e)

$D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$
Pas de parité
Zéro : $x = e^2$
AV : $x = e$, point limite : $(0; 1)$ (à droite)
AH : $y = 1$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = -\dfrac{1}{\ln(x) - 1}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x)-1)^2}$
$f''(x) = -\dfrac{\ln(x)+1}{x^2(\ln(x)-1)^3}$
PI(1/e ;3/2)



f) $D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Pas de zéro
AO : $y = -x$ (vers $-\infty$)
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \begin{cases} \ln((1+e^x)) & (\text{vers } -\infty) \\ f(x) & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$
$f'(x) = -\dfrac{1}{e^x + 1}$
$f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$



1.1.15

a) $(0; 1)$ et $(2\pi; e^{-2\pi})$ b) –

1.1.16 $\ln(3)\, x - y + 1 = 0$

1.1.17 $x - e\, y = 0$ et $(e; 1)$.

1.1.18 $\pi(1 - \ln(2))$.

1.1.19 $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$, $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$

1.1.20 $a = -2$, $b = 1$

1.1.21 $a = 2$

1.1.22 Les coordonnées sont $(e^2; 4)$ et l'aire vaut $16/e^2$ unités carrées.

1.1.23 $a = 2, \quad b = 1/e$

1.1.24 $k = e$

1.1.25 Le volume vaut $\dfrac{15\,\pi}{8\ln(2)}$ unités cubes.

1.1.26 $\sim 40.40\,^\circ$

1.1.27 –

1.1.28 –

1.1.29 a) Un arbre de 30 ans mesure environ 26.74 m ; b) après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m ; c) la hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m.

Approche géométrique de l'aire sous une courbe

1.2.1

a) $u_5 = 0.24$ et $v_5 = 0.44$

b) $u_{10} = 0.285$ et $v_{10} = 0.385$

c) $u_n = \dfrac{(n-1)(2\,n-1)}{6\,n^2}$ et $v_n = \dfrac{(n+1)(2\,n+1)}{6\,n^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant A \leqslant v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$, on a donc $A = \dfrac{1}{3}$.

1.2.2

Somme intégrale inférieure : $s_4 = 2\,(\ln(1) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(7)) \cong 9.308$
Somme intégrale supérieure : $S_4 = 2\,(\ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(9)) \cong 13.702$
Somme de Riemann : $S_R = 2\,(\ln(2) + \ln(4) + \ln(6) + \ln(8)) \cong 11.901$

1.2.3

La fonction $f(x) = e^x + 1$ est toujours croissante, donc la valeur minimale sur un intervalle est toujours à l'extrémité gauche et la valeur maximale est à l'extrémité droite.
Somme intégrale inférieure : $s_6 \cong 8.412$
Somme intégrale supérieure : $S_6 \cong 11.922$
Somme de Riemann : $S_R \cong 9.949$

1.2.4

Par exemple, en divisant l'intervalle $[0; 2]$ en quatre sous-intervalles d'égale longueur, on trouve :
$S_R = f(1/4)\cdot 1/2 + f(3/4)\cdot 1/2 + f(5/4)\cdot 1/2 + f(7/4)\cdot 1/2 = 37/8 = 4.625$

1.2.5

$S_R \cong 8.718$

Primitives et intégrales

1.3.1 –

1.3.2 –

1.3.3

a) $3x + c$

b) $\frac{5}{2}x^2 + c$

c) $x^2 + x + c$

d) $\frac{5}{2}x^2 - 4x + c$

e) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

f) $\frac{5}{4}x^4 + c$

g) $-\frac{3}{5}x^5 + c$

h) $\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - x + c$

i) $\sin(x) - \cos(x) + c$

j) $\tan(x) + c$

1.3.4

a) $-\frac{1}{x} + c$

b) $-\frac{1}{x^2} + c$

c) $\frac{7}{4x^4} + c$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

e) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

f) $2\sqrt{x} + c$

g) $3\sqrt[3]{x} + c$

h) $-\frac{1}{x^3} - \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$

1.3.5

a) $\frac{1}{3}\sin(3x) + c$

b) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

c) $\frac{1}{4}(x+3)^4 + c$

d) $\frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

e) $\frac{1}{42}(7x-2)^6 + c$

f) $\frac{1}{4}(3x^2+x)^4 + c$

g) $\frac{1}{40}(4x^2+3)^5 + c$

h) $\frac{1}{3}\sin^3(x) + c$

i) $\frac{1}{3}\tan^3(x) + c$

j) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + c$

k) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$

l) $\sqrt{x^2+2x} + c$

1.3.6

a) $x^3 - x^2 + 3x + c$

b) $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4x} + c$

c) $4\sqrt[4]{x^7} + c$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

e) $-2\cos(x) - 3\sin(x) + c$

f) $\dfrac{1}{2}\sin(2x) + c$

g) $5\tan(x) + 5\sin(x) + c$

h) $-8\cos(x) + 4\sqrt{2x} + c$

i) $\dfrac{9}{5}x^5 - 14x^3 + 49x + c$

j) $\dfrac{2}{7}\sqrt{x^7} - \dfrac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

k) $\dfrac{1}{21}(3x-5)^7 + c$

l) $\dfrac{4}{3(4-3x)^3} + c$

m) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-8)^5} + c$

n) $2\tan(3x) + c$

o) $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$

p) $2\sqrt{x^2-x-1} + c$

1.3.7

a) $f(x) = x^3 - 4x - 51$

b) $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + \dfrac{37}{6}x + \dfrac{35}{12}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + 8$

1.3.8

a) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

b) $F(x) = -\dfrac{18}{x} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$

c) $F(x) = \begin{cases} x^2/2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \le x < 4 \\ -x^2/2 + 6\,x - 9 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

1.3.9 $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 8}{2x}$

1.3.10

a) 15

b) 0

c) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{2}$

e) 1

f) 78

g) 2

h) $\dfrac{1}{3}$

1.3.11

a) 7

b) 9

c) -8

d) 8

1.3.12 –

1.3.13

a) $k = 2/9$

b) $k = 7$

c) $k \in \{\pi/3 + l \cdot 4\pi \mid l \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/3 + l \cdot 4\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$

d) $k \in \{-5/3; 0\}$

1.3.14

a) La fonction admet un minimum en $(-1; -1/4)$, un maximum en $(0; 0)$, et un minimum en $(1; -1/4)$.

b) La fonction admet un minimum en $(-1; -2/3)$.

1.3.15

a) $1 + 6\ \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

b) $\dfrac{352}{15}$

c) $\dfrac{1}{6}$

d) 98

e) $\dfrac{9\pi}{4}$

f) $\ln(18)$

1.3.16

a) $\dfrac{128}{3}$ b) 2 c) 1 d) $\dfrac{64}{3}$

1.3.17

a) $\dfrac{37}{12}$ b) $\dfrac{16}{3}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{490}{3}$

1.3.18 $c = \dfrac{15}{4}$

1.3.19

a) $\dfrac{32}{3}$ b) $\dfrac{64}{3}$ c) 9 d) 8

1.3.20

a) $a = 1 + \dfrac{\pi^2}{4}$, aire : $\dfrac{\pi^3 + 6\pi - 12}{12}$

b) $a = -\dfrac{8}{\pi^3}$, aire : $\dfrac{3\pi}{8} - 1$

c) $a = 1$, aire : $\dfrac{4}{3}$

d) $a = \frac{\pi}{2}$, aire : $\frac{2}{\pi} + 1$

1.3.21 42

1.3.22 $\frac{64}{3}$

1.3.23 $m = \frac{3}{2}$

1.3.24

a) $\frac{16}{15}\,\pi$

b) $\frac{4}{3}\,\pi$

1.3.25 $\frac{9}{2}$

1.3.26

a) $\frac{56}{3}\,\pi$

b) $\frac{1\,024}{5}\,\pi$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi^2}{2}$

1.3.27 –

1.3.28

a) $\frac{3}{10}\,\pi$

b) $135\,\pi$

1.3.29 $\frac{4}{3}\,\pi$

1.3.30 $x \approx 1.2091$

1.3.31

a) $\pi \int_1^2 ((3x)^2 - (x^2+2)^2)\,dx = \frac{22}{15}\,\pi$

b) $\pi \int_3^6 ((\sqrt{y-2})^2 - (y/3)^2)\,dy = \frac{\pi}{2}$

c) $\pi \int_3^6 ((\sqrt{y-2}-1)^2 - (y/3-1)^2)\,dy = \frac{\pi}{6}$

d) $\pi \int_3^6 ((2-y/3)^2 - (2-\sqrt{y-2})^2)\,dy = \frac{\pi}{6}$

e) $\pi \int_1^2 ((3x-3)^2 - (x^2+2-3)^2)\,dx = \frac{7}{15}\,\pi$

f) $\pi \int_1^2 ((6-(x^2+2))^2 - (6-3x)^2)\,dx = \dfrac{8}{15}\,\pi$

1.3.32

a) 162

b) $\dfrac{81}{4}\,\pi$

c) $\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{243}{8}$

1.3.33 $\dfrac{1}{2}$

Chapitre 2

Géométrie

2.1 Le cercle

2.1.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent un cercle. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle :

a) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$

b) $(x+2)^2+y^2=64$

c) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$

d) $x^2+(y-5)^2=5$

e) $x^2+y^2-2x+4y=20$

f) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$

g) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$

h) $x^2+y^2+x=0$

i) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$

j) $x^2+y^2+y=0$

k) $80x^2+80y^2-120x+80y+17=0$

l) $144x^2+144y^2-216x+192y=-145$

2.1.2 Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.

b) Le centre est $C(2;-3)$ et le rayon est égal à 7.

c) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6;-8)$.

d) Le cercle passe par $A(2;6)$ et son centre est $C(-1;2)$.

e) Les points $A(3;2)$ et $B(-1;6)$ sont les extrémités d'un diamètre.

f) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à $d: 3\,x-4\,y+20=0$.

g) Le centre est $C(1;-1)$ et le cercle est tangent à $d: 5\,x+9=12\,y$.

h) Le cercle passe par $A(3;1)$ et par $B(-1;3)$ et son centre est sur $d: 3\,x=y+2$.

i) Le cercle passe par $A(1;1)$, par $B(1;-1)$ et par $C(2;0)$.

2.1.3 Déterminer la position relative des deux objets suivants :

a) la droite $y = 2x - 3$ et le cercle $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$;

b) la droite $x - 2y - 1 = 0$ et le cercle $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

c) la droite $y = x + 10$ et le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

2.1.4 Déterminer la position relative des cercles

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

2.1.5 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $x^2 + y^2 + 4\,x - 6\,y = 17$ qui est perpendiculaire à la droite $5\,x + 2y = 13$.

2.1.6 Calculer la plus courte distance d'un point du cercle $x^2 + y^2 - 26\,x + 30\,y = -313$ au point $B(3;9)$.

2.1.7 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $\gamma : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ qui passe par le point milieu de la corde de support $d : 2\,x + y = 13$.

2.1.8 Calculer la longueur de la corde commune aux cercles $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y$ et $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40$.

2.1.9 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4\,x - 5\,y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2\,x = 3\,y + 10$ et $2\,y = 3\,x + 5$.

2.1.10 Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2\,x + y = 0$, est tangent aux droites $3\,y = 4\,x + 10$ et $4\,x = 3\,y + 30$.

2.1.11 Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2\,y = \ 1$ au point $T(3;?)$.

2.1.12 Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7\,x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0$$

l'un des points de contact étant $T(1;2)$.

2.1.13 Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2\,y = 9$ et $y = 2\,x + 2$.

2.1.14 Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites $3\,y = 4\,x - 10$, $3\,x = 4\,y + 5$ et $3\,x - 4\,y = 15$.

2.1.15 Déterminer l'équation du symétrique du cercle $x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 4 = 0$ relativement à la droite $x = y + 3$.

2.1.16 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle γ, Déterminer les équations des tangentes à γ au point T dans les cas suivants :

a) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 5$;

b) $T(-5;7)$ et $\gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;

c) $T(0;0)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$;

d) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$;

e) $T(2;3)$ et $\gamma : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$;

f) $T(2;1)$ et $\gamma : 3x^2 + 3y^2 = 2x + 11$.

2.1.17 Calculer la valeur de l'angle[1] aigu formé par la droite $3\,x - y = 1$ et le cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

2.1.18 Calculer l'angle[2] sous lequel se coupent les cercles $(x - 3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$.

2.1.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$, de direction donnée par la droite $2\,x + y = 7$.

2.1.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2\,y + 345$.

1. L'*angle d'une droite et d'un cercle* est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection
2. L'*angle de deux cercles* est l'angle formé par les tangentes aux cercles en l'un des points d'intersection

2.1.21 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2\,x$ issues du point $A(1; 6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.

2.1.22 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 20$ issues du point $A(6; 5)$, ainsi que les coordonnées des deux points de contact.

2.1.23 On mène par le point $A(4; 2)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2 = 10$. Calculer l'angle entre ces tangentes.

2.1.24 On mène par le point $A(4; -4)$ les tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 6\,x - 2\,y - 5$. Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence.

2.2 Solutions des exercices

Le cercle

2.1.1

a) $C(5;-2) \quad r=5$

b) $C(-2;0) \quad r=8$

c) $C(5;-2) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

d) $C(0;5) \quad r=\sqrt{5}$

e) $C(1;-2) \quad r=5$

f) $\emptyset$

g) $C(-2;1) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

h) $C\left(-\frac{1}{2};0\right) \quad r=\frac{1}{2}$

i) $\emptyset$

j) $C\left(0;-\frac{1}{2}\right) \quad r=\frac{1}{2}$

k) $C\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right) \quad r=\sqrt{0.6}$

l) $C\left(\frac{3}{4};-\frac{2}{3}\right) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

2.1.2

a) $x^2+y^2=9$

b) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$

c) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$

d) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$

e) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$

f) $x^2+y^2=16$

g) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

h) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

i) $(x-1)^2+y^2=1$

2.1.3

a) La droite coupe le cercle.

b) La droite est tangente au cercle.

c) La droite et le cercle sont disjoints.

2.1.4 Les cercles sont tangents extérieurement.

2.1.5 $2\,x-5\,y+19=0$

2.1.6 17

2.1.7 $x-2\,y-4=0$

2.1.8 10

2.1.9 $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$ et $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$

2.1.10 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

2.1.11 $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ et $(x-2)^2+(y-3)^2=5$

2.1.12 $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ et $(x-29)^2+(y+2)^2=800$

2.1.13 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ et $\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+\left(y+\frac{31}{5}\right)^2=\frac{289}{5}$

2.1.14 $\left(x+\frac{10}{7}\right)^2+\left(y+\frac{25}{7}\right)^2=1$ et $\left(x-\frac{30}{7}\right)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2=1$

2.1.15 $(x-5)^2+(y+2)^2=1$

2.1.16

a) $x-2\,y+5=0$

b) $3\,x-4\,y+43=0$

c) $3\,x-7\,y=0$

d) $2\,x-5\,y+12=0$

e) $7\,x+8\,y-38=0$

f) $5\,x+3\,y-13=0$

2.1.17 45°

2.1.18 90°

2.1.19 $2\,x+y-1=0$ et $2\,x+y+19=0$

2.1.20 $2\,x+y-5=0$ et $2\,x+y+5=0$

2.1.21 $2\,x+y-8=0$ et $x-2\,y+11=0$ $T_1(3;2)$ $T_2(-3;4)$

2.1.22 $x=6$ et $12\,x-35\,y+103=0$ $T_1(6;-2)$ $T_2\left(-\frac{23}{37};\frac{101}{37}\right)$

2.1.23 90°

2.1.24 $\sqrt{10}$

Chapitre 3

Combinatoire

3.1 Principes fondamentaux

3.1.1 De combien de manières peut-on choisir le délégué, son remplaçant et le responsable des nettoyages dans une classe de 25 élèves ?

3.1.2 Combien de « mots » de trois lettres comportent seulement des voyelles ou seulement des consonnes ?

3.1.3 Combien de nombres pairs de 3 chiffres avec répétitions peut-on former avec les trois chiffres 1, 2 et 4 ? Parmi ceux-ci, combien possèdent au moins une fois le chiffre 1 ?

3.1.4 Une personne veut acheter une voiture. Elle constate qu'elle a non seulement le choix entre 8 modèles, mais que chaque modèle possède 15 couleurs différentes et présente 3 versions différentes, chacune avec ou sans transmission automatique. De combien de manières peut-il effectuer sa commande ?

3.2 La notation factorielle

3.2.1 Je dispose d'une boîte allongée comportant 4 compartiments juxtaposés. Je dois mettre 4 boules de billard dans ma boîte. La première boule est jaune, la deuxième rouge, la troisième bleue et la quatrième verte. De combien de manières différentes puis-je procéder ?

3.2.2 Trois amis prennent place sur un banc. Si seule la position relative compte, de combien de façons peuvent-ils s'asseoir ?

3.2.3 D'un jeu de jass, je sors les 9 cartes de coeur. Je dispose ces 9 cartes sur une ligne devant moi. Sachant qu'il me faut 5 secondes pour poser toutes les cartes, combien de temps me faudra-t-il pour pouvoir tester toutes les configurations possibles ?

3.2.4 Soit n un nombre entier positif. On définit $n!$ de la façon suivante :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

L'expression $n!$ se lit n factorielle. Calculer la valeur de chaque expression ci-dessous :

a) $2!$

b) $3!$

c) $10!$

d) $2!\,3!$

e) $5!$

f) $50!$

g) $6!$

h) $100!$

i) $1000!$

3.2.5 Simplifier l'expression donnée, puis calculer sa valeur :

a) $\dfrac{12!}{9!}$

b) $\dfrac{11!}{3!\,2!\,4!}$

c) $\dfrac{12!}{8!\,4!}$

d) $\dfrac{100!}{98!\,5!}$

e) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

f) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

3.3 Les permutations

3.3.1 Huit personnes désirent s'asseoir sur un banc. De combien de façons différentes peuvent-elles s'asseoir ?

3.3.2 Combien existe-t-il d'anagrammes des mots : MERCI ; ENTENTE ?

3.3.3 On place au hasard les douze tomes d'une encyclopédie sur un rayon de bibliothèque.

a) Quel est le nombre total de possibilités ?

b) Parmi ces possibilités, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte, dans cet ordre ?

c) Parmi ces possibilités, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

3.3.4 Combien de nombres de 9 chiffres distincts peut-on former avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ?

3.4 Les arrangements

3.4.1

a) Combien de nombres de 4 chiffres distincts peut-on écrire avec 1, 2, 4, 5, 6, 7 ?

b) Combien de nombres de 4 chiffres non nécessairement distincts peut-on écrire avec 1, 2, 4, 5, 6, 7 ?

3.4.2 De combien de façons peut-on disposer 5 voitures dans un parking de 8 places ? Même question si les 3 premières places vont être occupées par les 3 membres de la direction faisant partie des 5 voitures à placer.

3.4.3 Un sac contient 7 boules numérotées de 1 à 7. Combien y a-t-il de tirages différents de 5 boules sans et avec remise ?

3.4.4 On lance 10 fois une pièce de monnaie. Combien de résultats différents peut-on obtenir (un résultat est une suite ordonnée de piles et de faces) ?

3.5 Les combinaisons

3.5.1 Lu sur la carte d'un restaurant : « les 1001 carpaccios ». Dans la pratique, le restaurateur propose au client d'agrémenter son carpaccio de 4 garnitures choisies parmi 15. Quel est le nombre réel de compositions possibles ?

3.5.2 Un groupe de 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y-a-t-il de poignées de mains ?

3.5.3

a) De combien de façons peut-on choisir un bouquet de 7 fleurs parmi 12 ?

b) Les 12 fleurs se répartissent en 8 roses et 4 gerberas. De combien de façons peut-on composer un bouquet de 7 fleurs, si l'on veut :

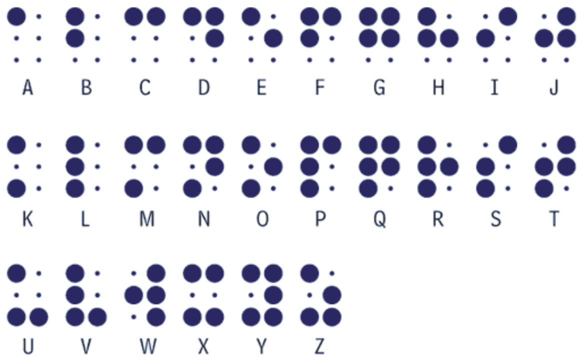
   i) 4 roses et 3 gerberas ?

   ii) au moins 1 gerbera ?

3.6 Problèmes mélangés

3.6.1 Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de 6 places. Quel est le nombre de possibilités ? Même question, mais avec 6 personnes.

3.6.2 Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?



3.6.3

a) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de « mots » de 4 lettres ?

b) Même question, en se limitant aux mots composés de 4 lettres différentes.

3.6.4 On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y-a-t-il de mains possibles ?

3.6.5 Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9 ? Parmi ceux-ci, combien sont-ils inférieurs à 400 ? impairs ? multiples de 5 ?

3.6.6 De combien de façons peut-on aligner 5 dés à six faces de couleurs différentes ?

3.6.7 Un menu de restaurant propose 10 hors-d'oeuvre, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun de ces 4 types de plats ?

3.6.8

a) Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants. De combien de manières différentes ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont se rendre ?

b) Même question dans le cas où, à chaque étage, un occupant au plus quitte l'ascenseur.

3.6.9

a) Neuf personnes prennent place autour d'une table ronde. De combien de manières peuvent-elles se disposer (on suppose que seule la place relative de ces personnes importe) ?

b) Même question, si l'on suppose de plus que deux personnes choisies d'avance doivent être placées côte à côte.

3.6.10 De combien de façons différentes peut-on aligner 5 boules rouges, 2 blanches et 3 bleues ?

3.6.11 Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot MISSISSIPPI ? Parmi ces mots, combien commencent et se terminent par la lettre S ?

3.6.12 Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot TOULOUSE, si les consonnes doivent occuper les première, quatrième et septième places ?

3.6.13 Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire avec les lettres du mot BATAVIA ?

3.6.14 De combien de manières peut-on asseoir 8 personnes en rang si :

a) aucune restriction n'est mise ;

b) les personnes A et B veulent être ensemble ;

c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, en supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes ;

d) les hommes, qui sont 5, doivent rester ensemble ;

e) les personnes forment 4 couples et chaque couple doit rester réuni.

3.6.15 Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y aura-t-il de parties disputées ?

3.6.16

a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?

b) Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. De combien de manières différentes peut-on choisir ces 4 personnes ?

3.6.17 Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut composer une commission de 7 membres comprenant exactement 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

3.6.18 On distribue les 36 cartes d'un jeu à 4 joueurs. Quel est le nombre de distributions différentes ?

3.6.19

a) Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'une épreuve écrite. Combien de choix peut-il faire ?
b) Même question en supposant de plus qu'il doive obligatoirement résoudre :
    i) les 3 premiers problèmes ;
    ii) 4 au moins des 5 premiers problèmes.

3.6.20 De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes, de manière que ces 5 cartes comprennent :

a) les 4 as ?
b) 2 as et 2 rois ?
c) au moins un as ?

3.6.21 Un questionnaire comprend 8 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec 4 oui et 4 non ?

3.6.22 Dans le jeu du Sport-Toto, on pronostique le résultat de 13 matches (1 = victoire de l'équipe à domicile, x = match nul, 2 = victoire de l'équipe visiteuse). Combien de pronostics différents peut-on écrire ?

3.6.23 Lorsqu'on jette 20 fois une pièce de monnaie, combien de séquences différentes sont possibles ? Parmi celles-ci, combien contiennent exactement 1 fois pile ? 4 fois pile ? 10 fois pile ? 20 fois pile ?

3.6.24 De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (marquer 6 numéros sur 45) ? Combien, parmi toutes ces possibilités, permettent de réaliser 6 points, 0 point, 3 points ?

3.6.25

a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 . On en tire simultanément trois. Déterminer le nombre de tirages différents.

b) Même question si l'on tire successivement 3 boules, sans remettre dans l'urne celles qui ont été tirées, en tenant compte de l'ordre.

c) Même question que sous b) si, après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne.

3.6.26 (Jeu du MasterMind) Dénombrer le nombre de possibilités qu'il y a de remplir 5 trous avec 8 couleurs différentes. Les couleurs peuvent être répétées et certains trous laissés vides.

3.6.27 Dans une assemblée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes.

a) Combien de comités peut-on envisager ?

b) Combien de ces comités comprennent exactement 3 dames ?

c) Combien de ces comités comprennent au moins 3 dames ?

3.6.28 Quel est le nombre de possibilités de former deux équipes de beach-volley différentes de 2 joueurs avec 7 personnes ?

3.6.29 Avec 15 personnes, de combien de manières différentes peut-on former 3 équipes de 5 ?

3.6.30 Sur un voilier, on dispose d'un instrument de signalisation constitué d'exactement 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et d'un pavillon bleu ?

3.6.31 Un gymnase a reçu 3 billets de concert pour les élèves d'une classe. Sachant que cette classe est composée de 19 étudiants, calculer le nombre de façons de distribuer ces trois billets dans chacun des cas suivants :

a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;

b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ;

c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

3.6.32

a) Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.

b) Parmi les configurations ci-dessus, quel est le nombre de celles où figure exactement trois fois le chiffre 7 ?

c) Même question, mais où figure au moins trois fois le chiffre 7.

d) Même question, mais où figure au moins une fois le chiffre 7.

3.6.33

a) Sur un damier rectangulaire de 4 colonnes et 3 lignes, de combien de manières peut-on placer 4 jetons de couleurs différentes ?

b) Même question s'il doit y avoir un seul jeton dans la première colonne et qu'il soit jaune.

c) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir exactement deux jetons dans la troisième colonne.

d) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir au moins deux jetons dans la quatrième colonne.

3.6.34

a) Sur un damier rectangulaire de 7 colonnes et 5 lignes, de combien de manières peut-on disposer 7 jetons, à savoir 4 bleus et 3 jaunes ?

b) Même question si les jetons bleus occupent les cases numérotées 1, 2, 3, 4 de la première ligne.

c) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir exactement 1 jeton bleu et 2 jetons jaunes dans la première colonne.

3.6.35 Sur un damier rectangulaire de 10 colonnes et 30 lignes, quel est le nombre de dispositions possibles pour 6 jetons de même couleur s'il y a :

a) au plus un jeton par colonne ?

b) au plus un jeton par ligne ?

c) au plus un jeton par ligne et par colonne ?

3.6.36 On dispose de 7 jetons. Deux portent le chiffre 1, trois portent le chiffre 2, deux portent le chiffre 3.

a) Combien de nombres différents peut-on composer en juxtaposant ces 7 jetons ?

b) Combien de ces nombres sont inférieurs à 1 300 000 ?

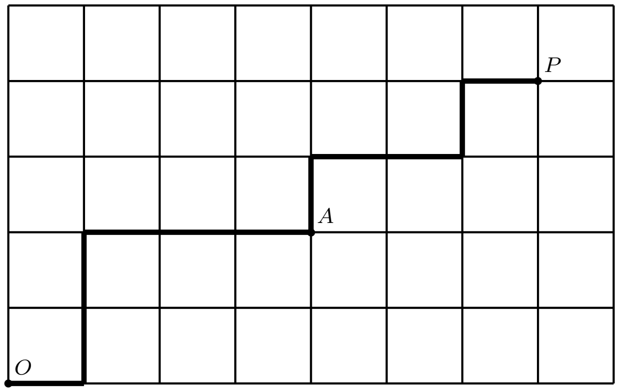
3.6.37 On dispose de 10 timbres tous différents. Trois d'entre eux sont rouges, cinq sont bleus et deux sont verts. On en choisit quatre. De combien de façons différentes peut-on faire ce choix, sachant que :

a) les timbres choisis sont tous de la même couleur ?

b) une et une seule des couleurs ne figure pas dans les timbres choisis ?

c) les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

3.6.38 Dans le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on veut joindre l'origine $O(0;0)$ au point $P(7;4)$ par un chemin aussi court que possible, en suivant les lignes du réseau :



a) Combien de tels chemins y a-t-il ?

b) Combien y en a-t-il qui passent par $A(4;2)$?

3.6.39 On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien y a-t-il de mains :

a) au total ?

b) formées de trois as ?

c) formées d'un roi et de deux as ?

d) ne contenant aucun as ?

e) contenant au moins un as ?

f) contenant exactement un as ?

3.6.40 Dans un groupe de 20 personnes, 10 lisent au moins la revue A, 8 lisent au moins la revue B et 3 lisent les deux revues. Combien d'échantillons différents peut-on choisir si l'échantillon doit être formé :

a) de cinq personnes lisant au moins une revue ?

b) de trois personnes lisant la revue A, et de deux personnes lisant la revue B, chacune d'entre elles ne lisant qu'une seule revue ?

c) de cinq personnes, dont trois au moins lisent la revue A ?

3.7 Solutions des exercices

Principes fondamentaux

3.1.1 $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$.

3.1.2 $8\,216$.

3.1.3 18 ; 10.

3.1.4 720.

La notation factorielle

3.2.1 Il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ façons de procéder.

3.2.2 Il y a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ façons de s'asseoir.

3.2.3 $5 \cdot 9! = 1\,814\,400$ secondes, soit 504 heures !

3.2.4

a) 2 ;

b) 6 ;

c) $3\,628\,800$;

d) 12 ;

e) 120 ;

f) $30\,414\,093\,201\,713\,378\,043\,612\,608\,166\,064\,768\,844\,377\,641\,568\,960\,512\,000\,000\,000\,000$;

g) 720 ;

h) $\sim 9.33262154439442 \cdot 10^{157}$;

i) $\sim 4.0238726007709 \cdot 10^{2567}$.

3.2.5

a) $1\,320$;

b) $138\,600$;

c) 495 ;

d) $\dfrac{165}{2}$;

e) $n(n-1)$;

f) $(n+2)(n+1)n$.

Les permutations

3.3.1 $40\,320$.

3.3.2 120 ; 210.

3.3.3 a) 479 001 600 ; b) 39 916 800 ; c) 79 833 600.

3.3.4 362 880.

Les arrangements

3.4.1 a) 360 ; b) 1'296.

3.4.2 6'720 ; 120.

3.4.3 2'520 ; 16'807.

3.4.4 1'024.

Les combinaisons

3.5.1 1'365.

3.5.2 66.

3.5.3 a) 792 ; b) i) 280 ; ii) 784.

Problèmes mélangés

3.6.1 720 dans les deux cas.

3.6.2 64 (en fait 63 à cause de l'espace entre les mots).

3.6.3 a) 456'976 ; b) 358'800.

3.6.4 $635\,013\,559\,600 \simeq 6,4 \cdot 10^{11}$.

3.6.5 120 ; 40 ; 80 ; 20.

3.6.6 933'120.

3.6.7 3960.

3.6.8 a) 32'768 ; b) 6'720.

3.6.9 a) 40'320 ; b) 10'080.

3.6.10 2 520.

3.6.11 34'650 ; 3'780.

3.6.12 180.

3.6.13 208.

3.6.14

a) 40 320 ;
b) 10 080.
c) 1 152 ;
d) 2 880 ;
e) 384.

3.6.15 66.

3.6.16

a) 12'650 ;
b) 303'600.

3.6.17 3'780.

3.6.18 $21\,452\,752\,266\,265\,320\,000 \simeq 2,1 \cdot 10^{19}$.

3.6.19

a) 45 ;
b) i) 21 ; ii) 35.

3.6.20

a) 32 ;
b) 1 008 ;
c) 175 616.

3.6.21 70.

3.6.22 1 594 323.

3.6.23 1'048'576 ; 20 ; 4'845 ; 184'756 ; 1.

3.6.24 8'145'060 ; 1 ; 3'262'623 ; 182'780.

3.6.25

a) 220 ;
b) 1 320 ;
c) 1 728.

3.6.26 59'049.

3.6.27

a) 658'008 ;
b) 241'500 ;
c) 484'380.

3.6.28 105.

3.6.29 126 126.

3.6.30 280.

3.6.31

a) 5'814 ; b) 6'859 ; c) 969.

3.6.32

a) 10^5 ; b) 810 ; c) 856 ; d) 40'951.

3.6.33

a) 11'880 ; b) 1'512 ; c) 2'592 ; d) 2'808.

3.6.34

a) 235'358'200 ; b) 4'495 ; c) 3'288'600.

3.6.35

a) $\sim 1,5 \cdot 10^{11}$; b) $\sim 5,9 \cdot 10^{11}$; c) $\sim 9 \cdot 10^{10}$.

3.6.36

a) 210 ; b) 40.

3.6.37

a) 5 ; b) 100 ; c) 105.

3.6.38 a) 330 ; b) 150 ;

3.6.39

a) 7140 ; b) 4 ; c) 24 ; d) 4960 ; e) 2180 ; f) 19840.

3.6.40

a) 3003 ; b) 350 ; c) 7752.

Chapitre 4

Probabilités

4.1 Premières notions

4.1.1 Une boîte contient 3 jetons : un rouge, un vert et un bleu. Écrire l'univers associé à chacune des expériences suivantes :

a) On tire un jeton au hasard de cette boîte. On l'y remet, puis on en tire un second.

b) On tire un jeton au hasard de cette boîte. On le garde, puis on en tire un second.

4.1.2 On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et l'on s'intéresse au côté qu'elle présente.

a) Écrire l'univers associé à cette expérience dans le cas où l'ordre d'apparition des côtés a une importance, puis écrire l'événement E :« pile apparaît au moins deux fois ».

b) Même question dans le cas où l'ordre d'apparition des côtés n'a pas d'importance.

c) Combien d'issues l'univers demandé sous a) contient-il si on jette la pièce quatre fois au lieu de trois ? Et si on jette la pièce n fois ?

4.1.3 On se rend à un match de football pour soutenir notre équipe fétiche et on s'intéresse aux différentes issues possibles de la partie : notre équipe gagne (G), effectue un match nul (N) ou perd (P). Préciser l'univers de cette expérience, puis déterminer la liste de ses événements.

4.1.4 On lance un dé. On considère l'événement A :« obtenir un nombre plus petit que 4 », B :« obtenir un nombre pair » et C :« obtenir un nombre plus grand que 1 ».

a) Écrire les événements A, B, C, $\overline{A}$, $A \cup C$ et $A \cap B$.

b) Les événements $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$ sont-ils incompatibles ?

c) Combien y a-t-il d'événements associés à l'expérience qui consiste à jeter un dé ?

d) Parmi tous les événements associés à l'expérience consistant à jeter un dé, combien sont incompatibles avec l'événement A ?

4.1.5 Trois boules sont tirées d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. On considère les événements :

A : « la première boule est blanche »,

B : « la deuxième boule est blanche »,

C : « la troisième boule est blanche ».

Exprimer les événements suivants en termes de A, B et C :

D : « toutes les boules sont blanches »,

E : « les deux premières boules sont blanches »,

F : « au moins une boule est blanche »,

G : « seulement la troisième boule est blanche »,

H : « exactement une boule est blanche ».

4.2 Définition de la notion de probabilité

4.2.1 On jette un dé. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) le numéro 2 ?
b) un numéro pair ?
c) un numéro supérieur à 4 ?

4.2.2 On tire une carte d'un jeu de 36 cartes. Quelles sont les probabilités des événements :

a) tirer un as ?
b) tirer un carreau ?
c) tirer le valet de coeur ?

4.2.3 On tire successivement 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 as ?
b) 2 rois et une dame ?
c) au moins un valet ?

4.2.4 On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) deux fois pile, puis deux fois face ?
b) deux fois pile et deux fois face (ordre quelconque) ?
c) au plus une fois pile ?

4.2.5 On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc. Quelle est la probabilité d'amener :

a) deux numéros égaux ?
b) un 2 et un 5 ?
c) un 2 rouge et un 5 blanc ?
d) une somme égale à 7 ?
e) une somme au plus égale à 3 ?
f) une somme au plus égale à 11 ?

4.2.6 On tire successivement 13 cartes d'un jeu de 52. Déterminer la valeur exacte de la probabilité que trois exactement de ces cartes soient des rois.

4.2.7 Dans un sac se trouvent 9 boules blanches, 4 rouges et quelques noires. La probabilité, lors d'un tirage simultané de deux boules, d'obtenir deux boules de même couleur est égale à 7/18. Combien y a-t-il de boules noires ?

4.2.8 D'un jeu de 36 cartes, on extrait simultanément au hasard 3 cartes. Calculer la probabilité de tirer :

a) 3 cartes de même « couleur » [1],
b) 3 rois,
c) 1 as et 2 rois,
d) exactement deux cartes de même « couleur »,
e) 2 cartes rouges et 1 noire,
f) 1 as, 1 roi et 1 dame,
g) 1 pique, 1 carreau et 1 trèfle.

4.2.9 Dans une assemblée de 500 personnes, 300 comprennent le français, 200 l'italien, 90 l'anglais, 160 à la fois le français et l'italien, 60 à la fois le français et l'anglais, 40 à la fois l'italien et l'anglais et 20 comprennent les trois langues. Si l'on choisit une personne au hasard dans cette assemblée, quelle est la probabilité que cette personne comprenne :

a) exactement 2 de ces 3 langues ?
b) l'une au moins de ces 3 langues ?

4.2.10 Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voitures déterminés, les

1. Contrairement à la couleur d'une carte à jouer (rouge ou noire), la « couleur » est à interpréter comme étant la nature de la carte (pique, coeur, carreau ou trèfle).

événements suivants :

$$P_i : \text{« il y a eu au moins } i \text{ panne(s) »} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

Lors du dépouillement de l'enquête, on a constaté que P_0, P_1, P_2 et P_3 se sont produits 543, 310, 156 et 81 fois respectivement. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient,

a) exactement une fois ?

b) moins de deux fois ?

4.2.11 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 2/5$, $P(B) = 1/2$ et $P(A \cap B) = 3/10$. Calculer la probabilité des événements : $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

4.2.12 Est-il possible d'avoir deux événements A et B tels que $P(A) = 0,9$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,1$?

4.2.13 Soit A et B deux événements. Montrer que :

a) $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

c) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ *(inégalité de Bonferroni)*

4.2.14 Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de 2 défauts différents désignés par A et B. 10% des appareils ont le défaut A, 8% le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits. Calculer la probabilité qu'il :

a) possède au moins un défaut,

b) possède le défaut A uniquement,

c) possède un seul défaut,

d) ne possède aucun défaut.

4.2.15 On sait que 60% des élèves d'une école ne portent ni bague, ni collier. De plus, 20% des élèves portent une bague et 30% ont un collier. Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?

4.2.16 Une agence de voyages fait un sondage statistique sur la connaissance de trois pays désignés par A, B et C. On constate que parmi les personnes interrogées, 42%

connaissent A, 55% connaissent B, 34% connaissent C, 18% connaissent A et B, 10% connaissent A et C, 15% connaissent B et C, 8% connaissent A, B et C. Un voyage est prévu pour l'une des personnes qui a répondu aux questions posées à l'occasion de ce sondage. On tire au sort le nom du gagnant. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

a) connaissant au moins l'un de ces trois pays ?
b) ne connaissant aucun de ces trois pays ?
c) connaissant deux pays exactement ?
d) connaissant A, mais ne connaissant ni B, ni C ?

4.2.17 Un connaisseur estime, lors d'un concours de beauté qui voit s'affronter en finale les candidates A, B et C, que A a autant de chances de gagner que B, mais deux fois plus de chances de gagner que C. Le jury ne peut désigner qu'une seule reine de beauté. Quelles sont, du point de vue de notre connaisseur, les probabilités de victoire des trois candidates ?

4.2.18 Un dé à six faces est pipé. On a $P(1) = 0.1$ et $P(6) = 0.4$. Les autres faces ont la même probabilité d'apparition. On jette une fois ce dé. Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir 4,
b) d'obtenir un nombre impair,
c) d'obtenir 4 ou un nombre impair.

4.2.19 Deux joueurs A et B jettent alternativement une paire de dés. Le joueur A commence et gagne s'il obtient un total de 6 avant que B n'obtienne un total de 7, auquel cas c'est B qui gagne. Quelle est la probabilité que A gagne ?

4.3 Probabilité conditionnelle

4.3.1 On jette deux dés l'un après l'autre et on considère les événements :

A :« le total des dés est 8 »,

B :« les deux nombres sont différents »,

C :« le premier dé donne un chiffre impair ».

Calculer : $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|\overline{B})$, $P(A|\overline{C})$.

4.3.2 On tire une carte d'un jeu constitué de 36 cartes. Considérons les événements suivants :

A :« la carte tirée est un coeur »,

B :« la carte tirée est le valet de coeur »,

C :« la carte tirée est une figure de pique (roi, dame ou valet) ou un coeur ».

Calculer : $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(B|C)$, $P(C|B)$.

4.3.3 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ et $P(A \cup B) = 3/4$. Calculer $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

4.3.4 On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) dans l'ordre : l'as de pique, de coeur, de trêfle, de carreau ?
b) les 4 as ?
c) les 4 as, sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?
d) un as seulement ?
e) un as au moins ?
f) un as au moins, sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

4.3.5 Soit A et B deux événements. Montrer que :

$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

4.3.6 On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire successivement au hasard 4 cartes de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) les 4 as ?
b) un as au moins ?
c) 4 cartes rouges ?
d) 4 cartes de familles différentes ?

e) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as ?

f) les 4 as, sachant que la première carte tirée était un as rouge ?

g) les 4 as, sachant que la première carte tirée était l'as de coeur ?

4.3.7 On sort d'un jeu de cartes les 4 as et les 4 rois. On tire ensuite au hasard 2 de ces 8 cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer :

a) deux as ?

b) deux as rouges ?

c) au moins un as ?

d) deux as, si l'on sait que l'une des cartes au moins est :

  i) un as ?

  ii) un as rouge ?

  iii) l'as de coeur ?

4.3.8 On jette une paire de dés bien équilibrés.

Calculer la probabilité que la somme obtenue soit supérieure à 9, sachant que :

a) le premier dé a donné un 5 ,

b) au moins un dé a donné un 5.

Sachant que les deux chiffres obtenus sont différents, calculer la probabilité pour que :

c) la somme des points soit égale à 6 ,

d) la somme des points soit inférieure à 5 .

4.3.9 Dans une certaine ville, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% a les yeux marron, 15% a à la fois les cheveux bruns et les yeux marron. On choisit au hasard une personne résidant dans la ville.

a) Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux marron ?

b) Si elle a les yeux marron, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas les cheveux bruns ?

c) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait ni les cheveux bruns, ni les yeux marron ?

4.3.10 La probabilité que la batterie d'une voiture neuve fonctionne plus de 10'000 km est de 80%, la probabilité qu'elle fonctionne plus de 20'000 km est de 40% et la probabilité qu'elle fonctionne plus de 30'000 km est de 10%. Si la batterie d'une voiture neuve fonctionne toujours après 10'000 km, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 20'000 km ?

4.3.11 On lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si l'on obtient face, on tire une bille d'une boîte B_1 contenant 3 billes rouges et 2 bleues. Sinon, on tire une bille d'une boîte B_2 contenant 2 billes rouges et 8 bleues. Sachant qu'on a tiré une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte B_1 ?

4.3.12 Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 1,8 m. Or, 60% des élèves sont des filles. On choisit un élève au hasard et on constate qu'il mesure plus de 1,8 m. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

4.3.13 Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est de 90% et celle que toutes les deux soient occupées 50%. Quelle est la probabilité :

a) que la première salle soit libre ?
b) que les deux salles soient libres ?
c) que l'une des deux salles au moins soit libre ?
d) qu'une seule salle soit libre ?
e) que la seconde salle soit libre, si l'on sait que la première est occupée ?

4.3.14 Trois boîtes A,B et C contiennent :

A : 3 bonbons rouges et 5 noirs,
B : 2 bonbons rouges et 1 noir,
C : 2 bonbons rouges et 3 noirs.

a) On prend une boîte au hasard et on tire un bonbon. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?
b) Si le bonbon est rouge, quelle est la probabilité qu'il provienne de A ?

4.3.15 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :

U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes,
U_2 : 1 boule rouge et 1 boule verte.

On tire une boule de U_1 puis on met les boules restantes dans U_2. On tire alors une boule de U_2. Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge,
b) que cette boule soit rouge, si l'on sait que la première boule tirée était rouge,
c) que la première boule tirée ait été rouge, si au second tirage on a une boule rouge.

4.3.16 On fait expérimentalement les constatations suivantes :

- le temps qu'il fait dépend du temps qu'il a fait la veille,
- s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0.8,

- s'il fait mauvais un jour, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est 0.6.

Lors d'une belle journée ensoleillée de printemps, on vous demande de calculer la probabilité :

a) qu'il fasse beau les trois jours suivants,
b) qu'il fasse beau dans trois jours.

4.3.17 On dispose de deux urnes. La première, A, contient 2 billets verts, 3 rouges et 5 jaunes. La seconde, B, contient 5 billets verts et 3 rouges. On procède à l'expérience suivante : un dé ayant été jeté, on tire un billet de l'urne A si le nombre de points du dé est inférieur à 3, un billet de l'urne B sinon. Calculer la probabilité :

a) de tirer un billet vert,
b) de tirer un billet vert, sachant que le nombre de points obtenu est supérieur à deux,
c) d'avoir obtenu un nombre de points inférieur à 3, sachant que le billet tiré est rouge,
d) d'avoir obtenu un nombre de points supérieur à 2, sachant que le billet tiré est jaune.

4.3.18 Pour rien au monde Monsieur C ne raterait une course. Et pourtant sa calvitie précoce l'expose cruellement aux rayons du soleil (lorsqu'il y en a). C'est sans doute la raison pour laquelle il est arrivé 9 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses non ensoleillées et seulement 2 fois sur 10 parmi les 10 premiers dans les courses où le soleil se manifeste. Or, trois courses sur dix en moyenne sont ensoleillées. Quelle probabilité y a-t-il que le temps ait été maussade lors de la dernière course Morat-Fribourg si l'on sait que Monsieur C figure au palmarès en septième place ?

4.3.19 Étant donné deux urnes contenant respectivement 3 boules rouges, 1 verte, 2 jaunes et 2 boules rouges, 2 vertes, 2 jaunes. Considérons l'expérience consistant à choisir au hasard une urne, d'où l'on en extrait une boule, qu'on met ensuite dans l'autre urne. On tire alors une boule de cette dernière urne. Calculer la probabilité :

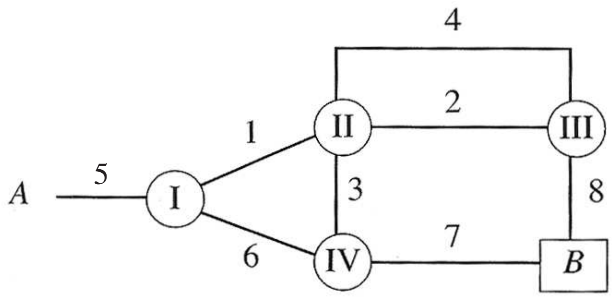
a) que cette boule soit rouge,
b) que cette boule soit rouge, si la première boule tirée était rouge,
c) que cette boule soit rouge, si l'urne tirée était U_1,
d) que l'on ait tiré l'urne U_1, si la dernière boule tirée était rouge.

4.3.20 Une boîte A contient 9 cartes numérotées de 1 à 9 et une boîte B contient 5 cartes numérotées de 1 à 5 . On choisit l'une des boîtes au hasard et on en extrait une carte. Si le numéro est pair, quelle est la probabilité que la carte provienne de A ?

4.3.21 La probabilité que trois tireurs atteignent une cible est 1/6 pour le premier, 1/4 pour le deuxième et 1/3 pour le troisième. Quelle est la probabilité, lors d'un tir d'ensemble, qu'au moins deux des tireurs atteignent la cible ?

4.3.22 Une urne contient 128 boules, dont x^2 sont blanches, toutes les autres étant rouges ($1 \leq x \leq 11$). On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne. Déterminer x de telle manière que la probabilité d'obtenir 2 boules de couleurs différentes soit maximale.

4.3.23 A veut se rendre chez son ami B mais il ignore l'emplacement de sa maison. Il se voit donc contraint d'examiner chaque maison le long des rues qu'il emprunte :



I, II, III et IV désignent des places, 1,2, . . . ,8 désignent des rues.

A chacune des places qu'il atteint, il choisit au hasard la rue suivante. A est tenace et ne s'arrête pas tant qu'il y a de nouvelles maisons à examiner, mais il se refuse à examiner deux fois les maisons d'une même rue ; dans ce cas, il préfère renoncer à sa visite.

a) Dresser l'arbre de tous les parcours menant à B ou conduisant à l'abandon.

b) Calculer la probabilité que A découvre la maison de B.

c) Sachant qu'il est arrivé chez B, calculer la probabilité que A ait dû examiner un nombre maximum de rues.

4.3.24 On construit un modèle simplifié de prévision météorologique en disant que demain le temps sera le même qu'aujourd'hui avec la probabilité p. On suppose que le temps est sec ou humide, et qu'aujourd'hui, il est sec.

a) Montrer que la probabilité P_n qu'il soit sec dans n jours est donnée par :

$$P_n = \begin{cases} (2p-1)P_{n-1} + (1-p) & , \text{si } n \geq 1 \\ 1 & , \text{si } n = 0 \end{cases}$$

b) Montrer que $P_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(2p-1)^n$, si $n \geq 0$.

c) En supposant $0 < p < 1$, quelle sera l'évolution météorologique du système à long terme ?

4.4 Evénements indépendants

4.4.1 On lance deux dés bien équilibrés, à savoir un rouge et un vert, et on considère les événements :

A : le dé rouge montre 3,

B : le dé vert montre 4.

C : la somme des dés est 7.

a) Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?

b) Les événements A, B et C sont-ils indépendants dans leur ensemble ?

4.4.2 Montrer que si deux événements sont indépendants et incompatibles, alors l'un d'entre eux au moins a une probabilité nulle.

4.4.3 Des appels reçus par une agence de voyage, 25% sont des demandes d'information et 75% sont des réservations. On suppose que les appels sont indépendants. Si l'agence reçoit six appels, calculer la probabilité qu'exactement quatre de ces appels soient des réservations.

4.4.4 On jette une pièce de monnaie 20 fois. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir :

a) 8 fois face ?

b) 9 fois face ?

c) 10 fois face ?

d) moins de 4 fois face ?

e) plus de 7 fois et moins de 13 fois face ?

4.4.5 Un fabricant prétend que seul le 4% des articles qu'il livre présentent un défaut. Pour vérifier ses dires on prélève au hasard, dans un lot d'articles très important, cinquante articles. Quelle probabilité a-t-on, si ses dires sont exacts, de trouver :

a) moins de trois articles défectueux ?

b) plus de quatre articles défectueux ?

4.4.6 Jean s'amuse à viser une quille avec une boule. L'expérience lui a appris qu'il renverse la quille 3 fois sur 10 en moyenne.

a) Quelle probabilité a-t-il de renverser la quille 4 fois au moins en lançant la boule 7 fois ?

b) Combien de fois doit-il lancer la boule s'il veut avoir plus de 90% de chances de renverser au moins une fois la quille ?

4.4.7 Une urne contient 3 boules rouges, 2 vertes et 5 noires. On en extrait successivement 5 boules avec remise. Quelle est la probabilité qu'on ait :

a) en tout 2 boules rouges, 2 vertes et 1 noire ?

b) en tout 1 boule rouge et 4 noires ?

c) au moins une boule de chaque couleur ?

4.5 Solutions des exercices

4.1.1 a) $\Omega = \{RR; RV; RB; VR; VV; VB; BR; BV; BB\}$;
b) $\Omega = \{RV; RB; VR; VB; BR; BV\}$.

4.1.2

a) $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$,
$E = \{PPP; PPF; PFP; FPP\}$;

b) $\Omega = \{PPP; PPF; PFF; FFF\}$, $E = \{PPP; PPF\}$; c) 16, 2^n.

4.1.3 Les événements sont : $\emptyset$, $\{G\}$, $\{N\}$, $\{P\}$, $\{G; N\}$, $\{G; P\}$, $\{N; P\}$, $\Omega = \{G; N; P\}$.

4.1.4 a) $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{2; 4; 6\}$; $C = \{2; 3; 4; 5; 6\}$; $\overline{A} = \{4; 5; 6\}$;
$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $A \cap B = \{2\}$; b) non ; c) 64 ; d) 8.

4.1.5 $D = A \cap B \cap C$; $E = A \cap B$; $F = A \cup B \cup C$; $G = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;
$H = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

4.2.1 a) $\dfrac{1}{6}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{3}$.

4.2.2 a) $\dfrac{1}{9}$; b) $\dfrac{1}{4}$; c) $\dfrac{1}{36}$.

4.2.3 a) $\dfrac{1}{1'785}$; b) $\dfrac{2}{595}$; c) $\dfrac{109}{357}$.

4.2.4 a) $\dfrac{1}{16}$; b) $\dfrac{3}{8}$; c) $\dfrac{5}{16}$.

4.2.5 a) $\dfrac{1}{6}$; b) $\dfrac{1}{18}$; c) $\dfrac{1}{36}$; d) $\dfrac{1}{6}$; e) $\dfrac{1}{12}$; f) $\dfrac{35}{36}$.

4.2.6 $\dfrac{858}{20'825}$.

4.2.7 15 boules noires.

4.2.8 a) $\sim 0,047$; b) $\sim 5,602 \cdot 10^{-4}$; c) $\sim 3,361 \cdot 10^{-3}$; d) $\sim 0,545$; e) $\sim 0,386$; f) $\sim 0,009$; g) $\sim 0,102$.

4.2.9 a) $\dfrac{2}{5}$; b) $\dfrac{7}{10}$.

4.2.10 a) $\sim 0,28$; b) $\sim 0,71$.

4.2.11 $P(A \cup B) = \dfrac{3}{5}$; $P(\overline{A}) = \dfrac{3}{5}$; $P(\overline{B}) = \dfrac{1}{2}$; $P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{1}{5}$; $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{10}$;
$P(\overline{A} \cup B) = \dfrac{9}{10}$; $P(A \cup \overline{B}) = \dfrac{4}{5}$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{2}{5}$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \dfrac{7}{10}$.

4.2.12 Non, car $P(A \cup B) = 1,1 > 1$.

4.2.13 –

4.2.14 a) 14% ; b) 6% ; c) 10% ; d) 86%.

4.2.15 a) 40% ; b) 10%.

4.2.16 a) 96% ; b) 4% ; c) 19% ; d) 22%.

4.2.17 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(C) = \frac{1}{5}$.

4.2.18 a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{7}{20}$; c) $\frac{19}{40}$.

4.2.19 $\frac{30}{61}$.

4.3.1 $P(A) = \frac{5}{36}$; $P(A|B) = \frac{2}{15}$; $P(A|C) = \frac{1}{9}$; $P(A|\overline{B}) = \frac{1}{6}$; $P(A|\overline{C}) = \frac{1}{6}$.

4.3.2 $P(B|A) = \frac{1}{9}$; $P(A|C) = \frac{3}{4}$; $P(B|C) = \frac{1}{12}$; $P(C|B) = 1$.

4.3.3 $P(A|B) = \frac{2}{5}$; $P(B|A) = \frac{2}{3}$.

4.3.4 a) $\sim 7,07 \cdot 10^{-7}$; b) $\sim 1,7 \cdot 10^{-5}$; c) $\sim 1,78 \cdot 10^{-3}$; d) $\sim 0,337$; e) $\sim 0,3895$; f) $\sim 0,313$.

4.3.5 –

4.3.6 a) $\sim 0,0143$; b) $\sim 0,9857$; c) $\sim 0,0143$; d) $\sim 0,2286$; e) $\sim 0,0286$; f) $\sim 0,0286$; g) $\sim 0,0286$.

4.3.7 a) $\sim 0,2143$; b) $\sim 0,0357$; c) $\sim 0,7857$; d) i) $\frac{3}{11}$, ii) $\frac{5}{13}$, iii) $\frac{3}{7}$.

4.3.8 a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{11}$; c) $\frac{2}{15}$; d) $\frac{2}{15}$.

4.3.9 a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{2}$.

4.3.10 $\frac{1}{2}$.

4.3.11 $\frac{3}{4}$.

4.3.12 $\frac{3}{11}$.

4.3.13 a) 30% ; b) 10% ; c) 50% ; d) 40% ; e) $\frac{2}{7}$.

4.3.14 a) $\frac{173}{360}$; b) $\frac{45}{173}$.

4.3.15 a) $\frac{17}{30}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{9}{17}$.

4.3.16 a) $0,512$; b) $0,688$.

4.3.17 a) $\frac{29}{60}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{2}{7}$; d) 0.

4.3.18 $\frac{21}{23}$.

4.3.19 a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{17}{35}$; c) $\frac{5}{14}$; d) $\frac{3}{7}$.

4.3.20 $\frac{10}{19}$.

4.3.21 $\frac{11}{72}$.

4.3.22 $x = 8$.

4.3.23 a) - ; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{8}$.

4.3.24 a) - ; b) - ; c) $\frac{1}{2}$.

4.4.1 a) oui ; b) non.

4.4.2 –

4.4.3 $\sim 0,30$.

4.4.4 a) $\sim 0,12$; b) $\sim 0,16$; c) $\sim 0,18$; d) $\sim 0,0013$; e) $\sim 0,74$.

4.4.5 a) $\sim 0,68$; b) $\sim 0,05$.

4.4.6 a) $\sim 0,126$; b) au moins 7 fois.

4.4.7 a) $0,054$; b) $\sim 0,094$; c) $0,507$.