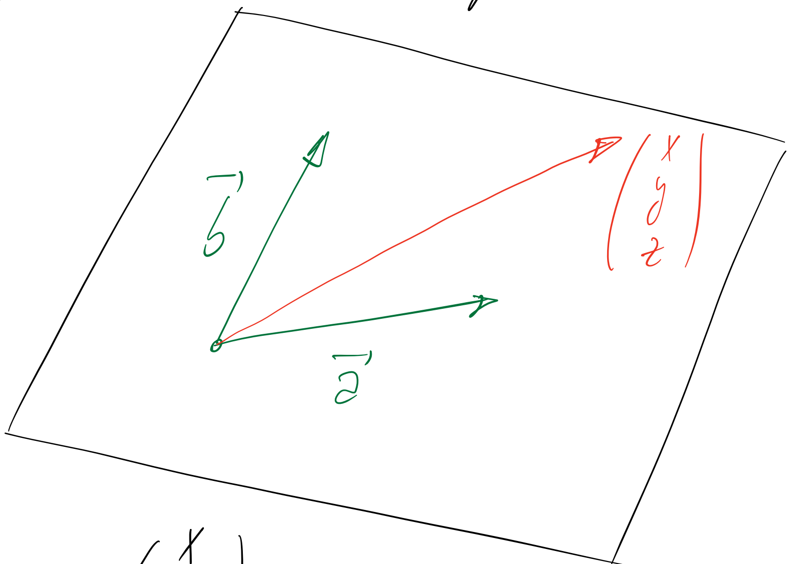
Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur tel que décrit.



Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ doit être coplanaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$, ce qui veut dire qu'il est combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

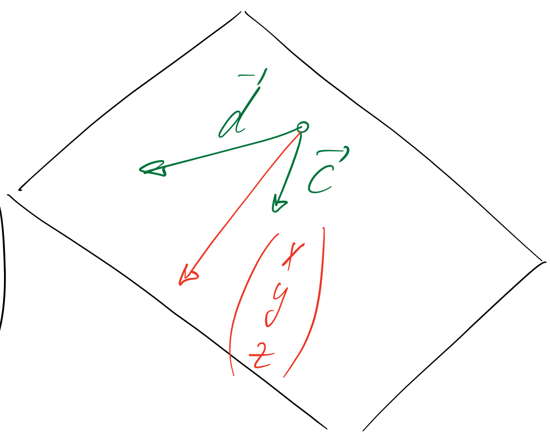
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= k \\ y &= -3k + 8l \\ z &= 2k - 5l \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y &= -3x + 8l \\ z &= 2x - 5l \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \cdot 5 \\ \cdot 8 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5y + 8z = -15x + 16x$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 5y - 8z = 0$$

Il faut également que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 35k - 2\ell \\ y = 14k - \ell \\ z = -10k \end{cases} \qquad k = -\frac{z}{10} \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{35}{10} z - 2\ell & \Big| \cdot 1 \\ y = -\dfrac{14}{10} z - \ell & \Big| \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 2y = -\frac{35}{10} z + \frac{28}{10} z \quad \Leftrightarrow \quad 10x - 20y + 7z = 0$$

On doit donc résoudre :

$$\begin{aligned} x - 5y - 8z &= 0 \\ 10x - 20y + 7z &= 0 \end{aligned} \left| \begin{aligned} &\cdot(-10) \\ &\cdot 1 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 5y + 8z \\ 30y + 87z &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 5y + 8z \\ y &= -\frac{87}{30} z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{87}{6} z + 8z \\ y &= -\frac{87}{30} z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{29}{2} z + 8z \\ y &= -\frac{29}{10} z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{13}{2} z \\ y &= -\frac{29}{10} z \\ z &= z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -65 \\ -29 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs qui sont à la fois coplanaires à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et coplanaires à $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont donc les multiples de $\begin{pmatrix} 65 \\ 29 \\ -10 \end{pmatrix}$