a) a/a, vu que $a \cdot 1 = a$ et que $1 \in \mathbb{Z}$.

$1/a$, vu que $1 \cdot a = a$ et que $a \in \mathbb{Z}$.

$a/0$, vu que $a \cdot 0 = 0$ et que $0 \in \mathbb{Z}$

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Si $0/a$, il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \cdot z = a$. Or, $0 \cdot z = 0 \ \forall z \in \mathbb{Z}$.

Donc $0 = a$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $a = 0$, $0 \cdot 0 = 0$ et donc $0/0$

(On peut également utiliser la question a).)

c) $\boxed{a/b \Rightarrow a/-b}$

Si a/b, $\exists z \in \mathbb{Z}$ tq. $a \cdot z = b$. On multiplie de chaque côté par (-1): $(-1) \cdot (a \cdot z) = (-1) \cdot b$

Ainsi, $a \cdot (-z) = (-b)$. Vu que $-z \in \mathbb{Z}$, on a bien $a/-b$

$\boxed{a \mid -b \Rightarrow -a \mid b}$

Si $a \mid -b$, $\exists z \in \mathbb{Z}$ tq. $a \cdot z = -b$. Multiplions à nouveau par (-1) de chaque côté:

$$(-1) \cdot (a \cdot z) = (-1) \cdot (-b) \Leftrightarrow (-a) \cdot z = b$$

Il est donc clair que $-a \mid b$.

$\boxed{-a \mid b \Rightarrow a \mid b}$

Si $-a \mid b$, $\exists z \in \mathbb{Z}$ tq. $(-a) \cdot z = b$

On a donc $(-1) \cdot a \cdot z = b$

$$\Leftrightarrow a \cdot (-1) \cdot z = b$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (-z) = b$$

On peut conclure grâce au fait que $(-z) \in \mathbb{Z}$.

On a donc:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{a \mid b} & \Rightarrow & \boxed{a \mid -b} \\ & \nwarrow\!\!\Uparrow & \swarrow\!\!\Downarrow \\ & \boxed{-a \mid b} & \end{array}$$

Les trois propriétés sont équivalentes.

d) Si $a|b$, $\exists\, z \in \mathbb{Z}$ tq. $a \cdot z = b$

Si $a|c$, $\exists\, w \in \mathbb{Z}$ tq. $a \cdot w = c$

En sommant ces deux lignes, on obtient :

$$a \cdot z + a \cdot w = b + c \Leftrightarrow a(z+w) = b+c$$

Finalement, vu que $z + w \in \mathbb{Z}$, on a bien $a|(b+c)$.

e) Si $a|b$, $\exists\, z \in \mathbb{Z}$ tq. $a \cdot z = b$

Si $b|c$, $\exists\, w \in \mathbb{Z}$ tq. $b \cdot w = c$

En substituant la valeur de b donnée par la première égalité dans la seconde, on obtient :

$$(a \cdot z) \cdot w = c \Leftrightarrow a \cdot (z \cdot w) = c$$

Vu que $z \cdot w \in \mathbb{Z}$, on en conclut que $a|c$.