Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

On sait que $\lfloor a/b \rfloor \leq a/b < \lfloor a/b \rfloor + 1$

On peut donc, d'une part, écrire

$$b \cdot \lfloor a/b \rfloor \geq b \cdot a/b \quad \text{car } b < 0$$

$$\Rightarrow \quad b \cdot \lfloor a/b \rfloor \geq a$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq a - b \lfloor a/b \rfloor$$

$$\Rightarrow \quad a - b \cdot \lfloor a/b \rfloor \leq 0$$

D'autre part,

$$b \cdot a/b > b \left(\lfloor a/b \rfloor + 1 \right) \quad \text{car } b < 0$$

$$\Rightarrow a > b \lfloor a/b \rfloor + b \Leftrightarrow a - b \lfloor a/b \rfloor > b$$

On a bien

$$a \bmod b = a - b \lfloor a/b \rfloor \in \,]b ; 0] \qquad \square$$