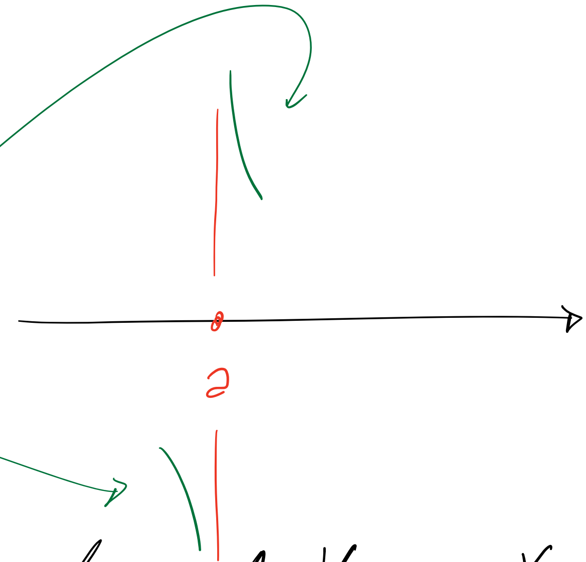
Asymptotes

A.V. (verticales)

$a \notin D_f$



si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, alors A.V. en $x = a$

A.H. (horizontale)

si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$, alors A.H. en $y = c$

A.O. (oblique)

si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ et que $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = h$

alors A.O. en $y = mx + h$ (cas général)

Asymptotes de $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec P, Q des polynômes

$$\boxed{f \text{ admet une A.O.} \Leftrightarrow \deg P = \deg Q + 1}$$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & mx+h \\ \cline{1-1} R(x) & \end{array}$$

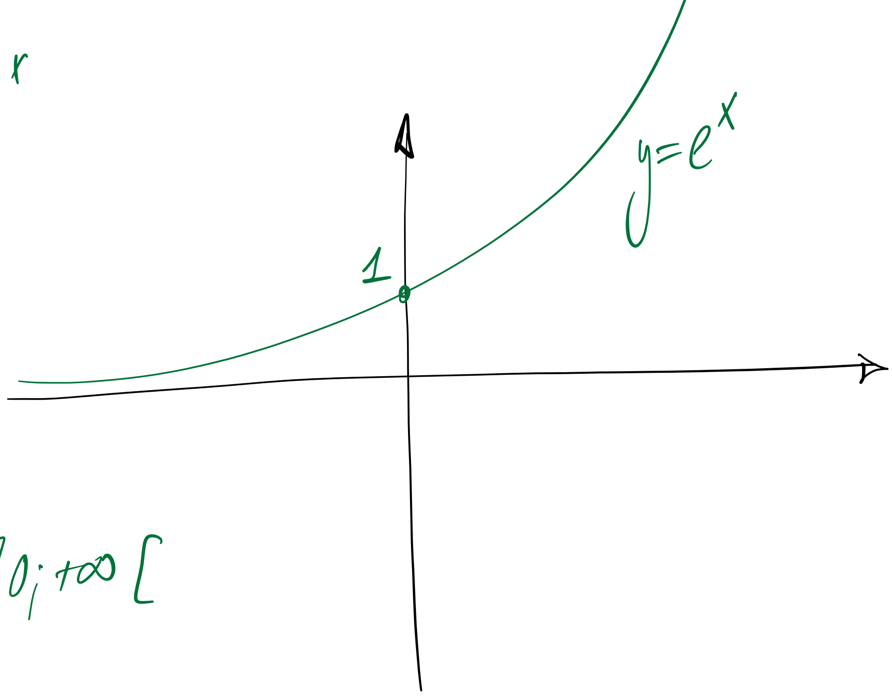
$\delta(x)$

Le signe de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ donne la position du graphe de f par rapport à son asymptote.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = mx+h + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$f(x) = e^x$

$D_f = \mathbb{R}$



$\mathbb{R} \xrightarrow{e^x}]0;+\infty[$

1. ED, zéros, tableau des signes

   $f(x) = 0$

2. Asymptotes (A.V., $\underbrace{\text{A.H., A.O.}}_{\text{si nécessaire, séparer}}$)

   $x \to +\infty$

   $x \to -\infty$

3. Dérivée, tableau des variations (croissance)

   max., min., palier(s)

   Calculer les coordonnées

4. Dérivée seconde, tableau des signes (courbure)

   point(s) d'inflexion

   Calculer les coordonnées et les pentes correspondantes

5. Graphe à partir des éléments ci-dessus

$$y'(1+x^2) = x \cdot y$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{T}\,dT = \ln|T|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|u(x)| + C$$

$$\boxed{r\ln a = \ln a^r}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x^2| + C = \ln\sqrt{1+x^2} + C$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\sqrt{1+x^2} + c$$

$$|y| = e^{\ln\sqrt{1+x^2}+c} = e^{\ln\sqrt{1+x^2}} \cdot e^c$$

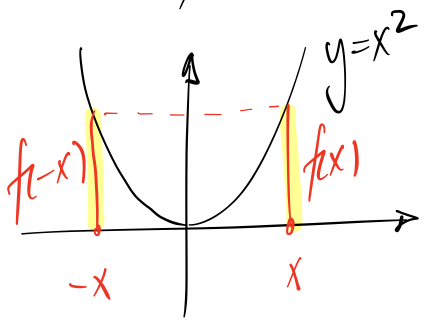
$$y = \pm e^c \cdot \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k \cdot \sqrt{1+x^2} \qquad k \in \mathbb{R}}$$

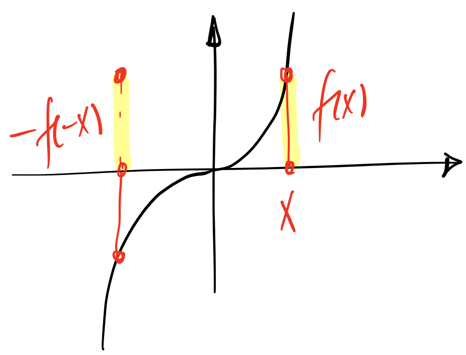
car $y=0$ est sol.

Parité: Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

f est **paire** si $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D_f$



f est **impaire** si $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D_f$



$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

$\frac{2x}{x+1}$

x		-1		0	
	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$D_f =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$\boxed{x=-1}$?

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = « \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) »$$

$$= « \ln(+\infty) » = +\infty$$

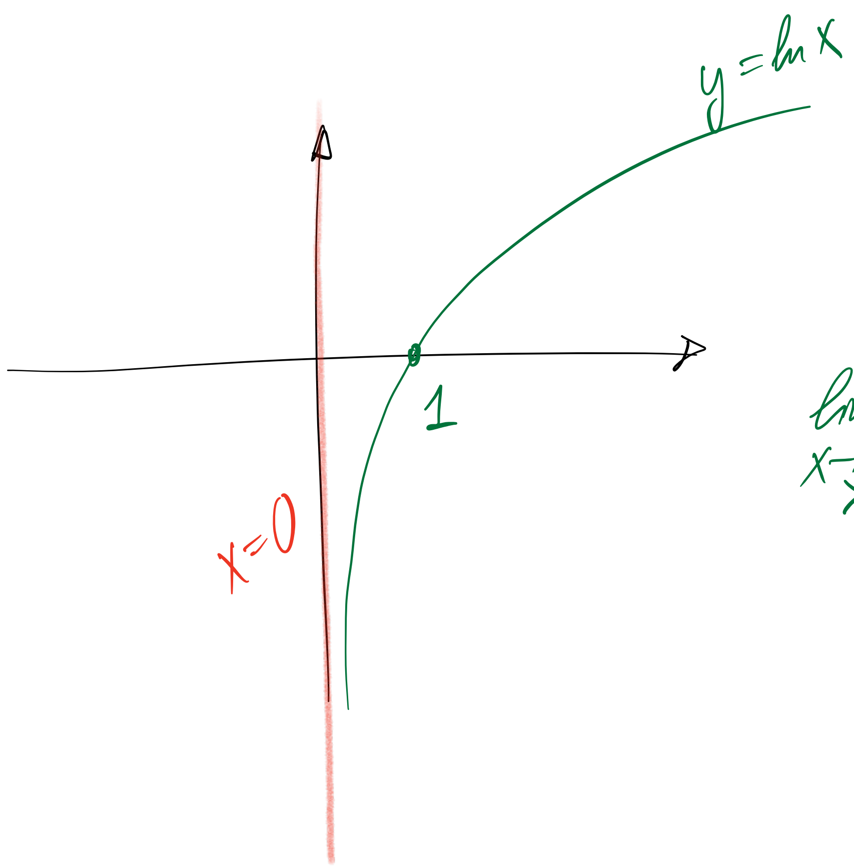
$\Rightarrow$ A.V. en $x=-1$ (à gauche)

? $\boxed{x=0}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$$

$$= « \ln\left(\frac{0}{1}\right) » = « \ln(0) » = -\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A.V. en } x = 0 \text{ (à droite)}}$



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$$

A.V. en $x=0$
(à droite)