2.3.10 a)

$$\int \frac{4x-1}{x^2-2x-8}\,dx$$

$a, b \in \mathbb{R}$

Éléments simples :

$$\frac{4x-1}{(x-4)(x+2)} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2}$$

① Multiplier par $(x-4)$ :

$$\frac{4x-1}{x+2} = a + \frac{b(x-4)}{x+2}$$

Remplacer $x$ par $4$

$$\frac{4\cdot 4-1}{4+2} = a + \frac{b\cdot 0}{x+2} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

② Multiplier par $(x+2)$ :

$$\frac{4x-1}{x-4} = \frac{a(x+2)}{x-4} + b$$

Remplacer $x$ par $-2$ :

$$\frac{-8-1}{-6} = 0 + b$$

$$b = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4x-1}{(x-4)(x+2)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x-4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{4x-1}{(x-4)(x+2)} \, dx = \frac{5}{2} \ln(|x-4|) + \frac{3}{2} \ln(|x+2|) + C$$

2.3.10 f

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x((x+i)(x-i))^2}$$

$$= \frac{1}{x(x+i)^2(x-i)^2}$$

$$= \frac{a}{x} + \frac{a_1}{x+i} + \frac{a_2}{(x+i)^2} + \frac{b_1}{x-i} + \frac{b_2}{(x-i)^2}$$

① Multiplier par $x$ :

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = a + x \cdot (*)$$

$x=0$

$$\boxed{a = 1}$$

② Multiplier par $(x+i)^2$:

Pas de division par $(x+i)$

$$\frac{1}{x(x-i)^2} = a_2 + a_1 \cdot (x+i) + (x+i)^2 \cdot (*)$$

$X = -i$

$$\frac{1}{-i\,(-2i)^2} = a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

③ Multiplier par $(X-i)^2$ :

$$\frac{1}{X\,(X+i)^2} = b_2 + b_1(X-i) + (X-i)^2(*)$$

Pas de division par $(X-i)$

$X = i$

$$\frac{1}{i\,(2i)^2} = b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{X\,(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{a_1}{X+i} - \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{(X+i)^2}$$

$$+ \frac{b_1}{X-i} + \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{(X-i)^2}$$

Multiplier par $x$ de chaque coté :

$$\frac{1}{(X^2+1)^2} = 1 + \frac{a_1 X}{X+i} - \frac{i}{4}\cdot\frac{X}{(X+i)^2} + \frac{b_1 X}{X-i} + \frac{i}{4}\cdot\frac{X}{(X-i)^2}$$

On passe à la limite : $x \to \infty$

$$0 = 1 + a_1 + b_1 \iff a_1 + b_1 = -1$$

On remplace $x$ par $2i$

$$\frac{1}{2i(-4+1)^2} = \frac{1}{2i} + \frac{a_1}{3i} - \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{-9} + \frac{b_1}{i} + \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$\iff \frac{1}{18i} = \frac{1}{2i} + \frac{a_1}{3i} + \frac{b_1}{i} + \frac{i}{36} - \frac{i}{4}$$

$$\iff \frac{1}{18} = \frac{1}{2} + \frac{a_1}{3} + b_1 - \frac{1}{36} + \frac{1}{4}$$

$$\iff \frac{a_1}{3} + b_1 = \frac{2}{36} - \frac{18}{36} + \frac{1}{36} - \frac{9}{36}$$

$$\iff \frac{a_1}{3} + b_1 = -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}$$

$\Leftrightarrow \quad a_1 + 3b_1 = -2$

On résoud le système :

$$\begin{cases} a_1 + 3b_1 = -2 \\ a_1 + b_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow 2b_1 = -1 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2}$$

On en conclut que $a_1 = b_1 = -\frac{1}{2}$

La décomposition est donc

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+i} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-i} - \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{(x+i)^2} + \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{(x-i)^2}$$

$x^2 - 2xi - 1 - (x^2 + 2xi - 1) = -4xi$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x-i+x+i}{x^2+1} - \frac{i}{4}\cdot\frac{(x-i)^2-(x+i)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

On peut donc écrire :

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)} + C$$

Autre méthode :

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

$$a = \frac{1}{(0^2+1)^2} = 1 \checkmark$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = 1 + \frac{bx^2+cx}{x^2+1} + \frac{dx^2+ex}{(x^2+1)^2}$$

$$\downarrow x\to\infty \qquad\qquad \downarrow x\to\infty \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 = 1 + b + 0$$

$b = -1$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

$\boxed{x=1}$

$$\frac{1}{4} = 1 + \frac{c-1}{2} + \frac{d+e}{4}$$

$$1 = 4 + 2c - 2 + d + e$$

$$\Leftrightarrow 2c + d + e = -1$$

$\boxed{x=-1}$

$$-\frac{1}{4} = -1 + \frac{c+1}{2} + \frac{-d+e}{4}$$

$$-1 = -4 + 2c + 2 - d + e \Leftrightarrow 2c - d + e = 1$$

$\Rightarrow 2d = -2 \Rightarrow d = -1$

$\Rightarrow 2c + e = 0 \Leftrightarrow e = -2c$

$\boxed{x = 2}$

$$\frac{1}{50} = \frac{1}{2} - \frac{2+c}{5} + \frac{e-2}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{50} = \frac{1}{2} - \frac{2+c}{5} + \frac{-2c-2}{25} \quad \Big| \cdot 50$$

$\Leftrightarrow 1 = 25 - 20 - 10c - 4c - 4$

$\Leftrightarrow 5 = 5 - 14c$

$\Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow e = 0$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$x = \varphi(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

si $F' = f$

$F = \int f$

$x = 2t - 1$

$$\int f(x)\,dx = \int f(2t-1)(2t-1)'\,dt$$

$x = 2t - 1 \;/\; dx = (2t-1)' \cdot dt = 2dt$

2.3.10 d)

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

IRRÉD.

$\boxed{\text{Multiplier par } x \text{ et passer à la limite } (x \to \infty)}$

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{ax^2+bx}{x^2+1} + \frac{cx}{x+1} + \frac{dx}{x-1}$$

$$\downarrow x\to\infty \qquad \downarrow x\to\infty \qquad \downarrow x\to\infty \qquad \downarrow x\to\infty$$

$$0 = a + c + d$$

$\boxed{\text{Remplacer } x \text{ par } 0}$

$$-1 = b + c - d$$

Multiplier par $x+1$ et remplacer $x$ par $-1$

$$c = \frac{1}{\left((-1)^2+1\right)(-1-1)} = -\frac{1}{4}$$

Multiplier par $x-1$ et remplacer $x$ par $1$

$$d = \frac{1}{(1^2+1)(1+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = a = 0$$

$$\Rightarrow \quad -1 = b + \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Thé au harem

$$\frac{1}{(x-a)^k} = \frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + \frac{a_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{a_k}{(x-a)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2+bx+c)^k} = \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{x^2+bx+c} + \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{\alpha_k x+\beta_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

$$\Delta = b^2 - 4c < 0$$

2.3.10 e)

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2-4)}\,dx$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+2)(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{x-2}$$

Remplacer x par 0:

$$\boxed{0 = b + \frac{c}{2} - \frac{d}{2}}$$

$c = d$

$\Rightarrow b = 0$

Multiplier par x+2 | remplacer x par −2 :

$$\frac{-2}{5\cdot(-4)} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{10}$$

Multiplier par x−2 | remplacer x par +2 :

$$\frac{2}{5\cdot 4} = d \Leftrightarrow d = \frac{1}{10}$$

Multiplier par $x$ et passer à la limite ($x \to \infty$)

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-4)} = \frac{ax^2+bx}{x^2+1} + \frac{x}{10(x+2)} + \frac{x}{10(x-2)}$$

$$\downarrow x\to\infty \qquad \downarrow x\to\infty \qquad \downarrow x\to\infty \qquad \downarrow x\to\infty$$

$$0 = a + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$

$$a = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5} = \frac{x^2-4x+5 \; + 1}{x^2-4x+5}$$

$$= 1 + \frac{1}{x^2-4x+5}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

1) Multiplier par $(x+1)^2$ / $x=-1$ $\to b$

2) Multiplier par $(x-1)^2$ / $x=1$ $\to d$

3) Multiplier par $x$ et passer à la limite $(x \to \infty)$ $\to$ cond. sur a et c

4) Remplacer par $x=0$ $\to$ cond. sur a et c

$$x^2+4x+29 = x^2+4x+4+25$$

$$= (x+2)^2+25 = 25t^2+25$$

$$25t^2 = (x+2)^2 \qquad = 25(t^2+1)$$

$$5t = x+2 \qquad \left(\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t)+c\right)$$

$$\boxed{x = 5t-2}$$

$$dx = 5dt$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+29}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{t^2+1}\,5dt = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$x^2 + bx + c =$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} + c =$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$