$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

f réelle à valeurs réelles

$\uparrow$ nombre $\qquad \uparrow$ nombre

$f \; (D, A, F)$ tq. $F \subset D \times A$ avec un unique y correspondant à un x donné

$\subset$: inclus

F est une partie de $D \times A$

$$D \times A = \{(x;y) \mid x \in D, \; y \in A\}$$

$(x; y_1)$ et $(x; y_2)$ dans F

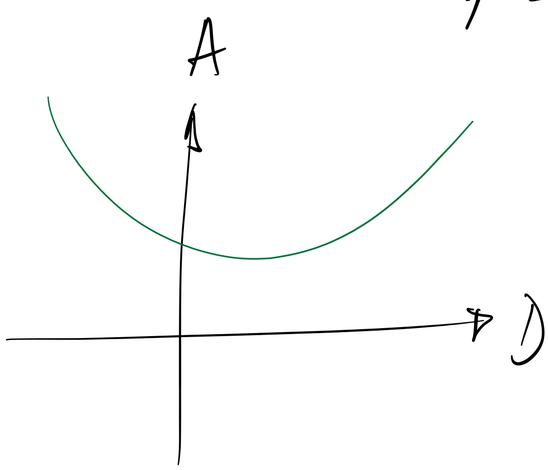
$\Rightarrow y_1 = y_2$

$f(x) = x^2$

$D = \mathbb{R}$

$A = [0; +\infty[$

$F = \{(x; x^2) \mid x \in D\}$



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f \; \left(\mathbb{R}^*; \mathbb{R}^*; \{(x; \tfrac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}\right)$$

bijection

$$f : \mathbb{R}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^*$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

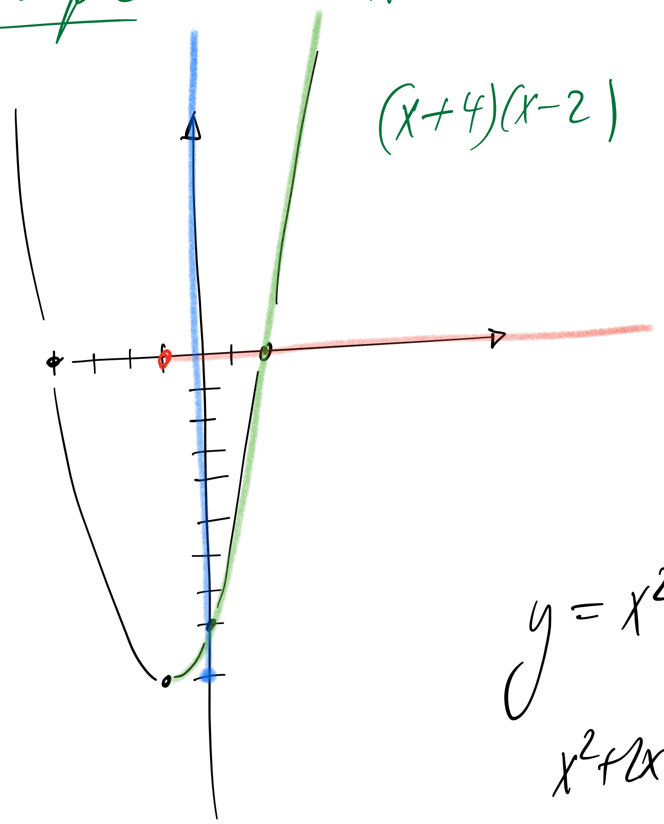
$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} = f^r(y) \qquad f^r : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$$

$$f : D \xrightarrow{\sim} A \quad \text{bijectif}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Trouver la réciproque : $y = f(x)$ à résoudre

Exemple $\quad x^2+2x-8 \qquad S = (-1 ; -9)$

$(x+4)(x-2)$



$$[-1 ; +\infty[\longrightarrow [-9 ; +\infty[$$
$$x \longmapsto x^2+2x-8$$

$$y = x^2+2x-8$$

$$x^2+2x-8-y=0$$

$$x^2+2x-(y+8)=0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-1)(y+8)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4y+36}}{2} = -1 \pm \sqrt{y+9}$$

$\boxed{\text{SUITES}}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ $\quad \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

$$x_n = \frac{1}{2^n} \qquad n \in \mathbb{N} \leftarrow n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \boxed{n \geq 1} \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$\boxed{\text{Limite d'une suite}}$

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n = x(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0 = \lim \frac{1}{n}$$

$$x_n = \frac{n-1}{n+2} \qquad \lim x_n = \lim \frac{n-1}{n+2} = \lim \frac{n}{n} = 1$$

$$\frac{n-1}{n+2} \xrightarrow{n\to\infty} « \frac{\infty}{\infty} »$$

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0}{1+0} = \underline{1}$$

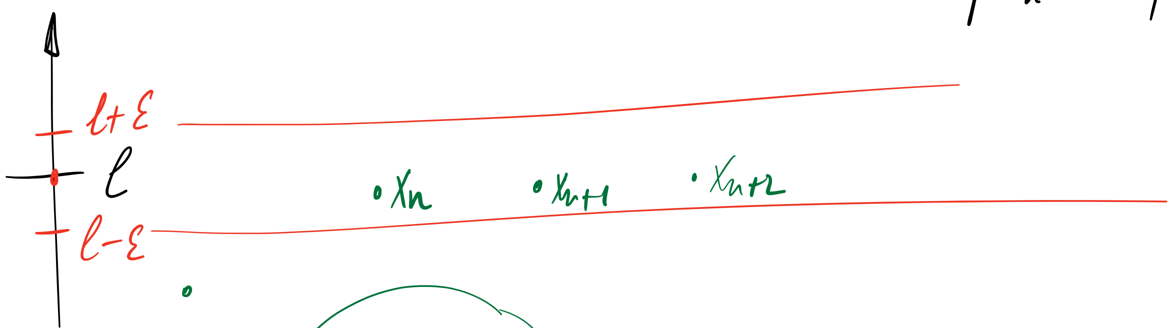
Définition Soit x_n, $n \in \mathbb{N}$ un suite de nombres réels.

On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite de x_n, noté

$$\ell = \lim x_n$$

si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon$ tq. si $n \geq N_\varepsilon$

alors $|x_n - \ell| < \varepsilon$



$n \geq N_\varepsilon$

Exemple: $\quad x_n = \dfrac{2n-3}{3n+4} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon = 0{,}0001$

N_ε correspondant. $\qquad \lim x_n = \dfrac{2}{3}$

$$\left| \frac{2n-3}{3n+4} - \frac{2}{3} \right| < 0{,}0001$$

$$\left|\frac{(2n-3)\cdot 3-2(3n+4)}{3(3n+4)}\right| < 0{,}0001$$

$$\left|\underbrace{\frac{-17}{3(3n+4)}}_{<0}\right| = \underbrace{\frac{17}{3}\cdot\frac{1}{3n+4}}_{>0} < 0{,}0001$$

$$n \geq 0 \Rightarrow 3(3n+4) > 0$$

$$\frac{17}{0{,}0003} < 3n+4$$

$$3n > \frac{17}{0{,}0003} - 4$$

$$n > \frac{17}{0{,}0009} - 4/3 = 18\,887{,}\overline{5}$$

$$\Rightarrow N_\varepsilon = 18\,888 \qquad \text{și} \quad \varepsilon = 0{,}0001$$

Montrer que x_n converge vers $\frac{2}{3}$.

$$x_n = \frac{2n-3}{3n+4}$$

$$\left| \frac{2n-3}{3n+4} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

... Voir plus haut

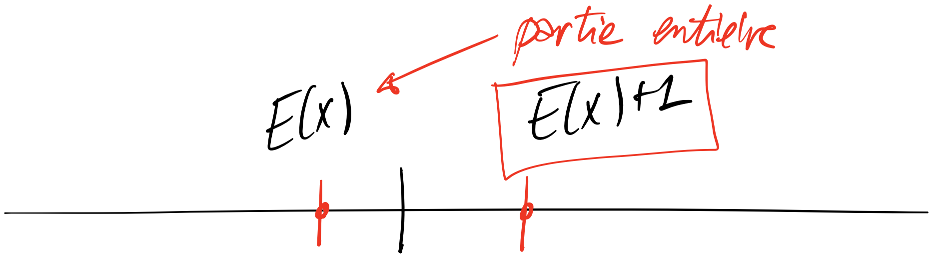
$$\Leftrightarrow \left| \frac{-17}{3(3n+4)} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{3(3n+4)} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{3\varepsilon} < 3n+4$$

$$\Leftrightarrow 3n > \frac{17}{3\varepsilon} - 4$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{17}{9\varepsilon} - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad N_\varepsilon = E\left(\frac{17}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}\right) + 1$$



$$x = \frac{17}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}$$

En conclusion : si $n > N_\varepsilon$ on a bien

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

ce qui fait que $\lim x_n = \frac{2}{3}$.