

Étude de la fonction $f(x) = 1 - 2 \sin(x)$ sur $[\pi, 3\pi]$

1. Ensemble de définition

La fonction $f(x) = 1 - 2 \sin(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car la fonction sinus est définie sur \mathbb{R} . Sur l'intervalle restreint $[\pi, 3\pi]$, l'ensemble de définition est donc :

$$[\pi, 3\pi].$$

2. Zéros et tableau des signes

Les zéros de la fonction sont les solutions de $f(x) = 0$, soit :

$$1 - 2 \sin(x) = 0 \implies \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Les solutions générales sont $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Sur $[\pi, 3\pi]$ (environ $[3.14, 9.42]$), pour $k = 1$:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \approx 6.81, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6} \approx 8.90.$$

Les autres valeurs de k sortent de l'intervalle.

Zéros : $x = \frac{13\pi}{6}$ et $x = \frac{17\pi}{6}$.

Le signe de $f(x)$ dépend de $\sin(x)$:

- $f(x) > 0$ si $\sin(x) < \frac{1}{2}$,
- $f(x) < 0$ si $\sin(x) > \frac{1}{2}$,
- $f(x) = 0$ si $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Tableau des signes :

x	π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2} \uparrow$	$\frac{1}{2} \downarrow$	0
Signe de $f(x)$	+	0	-	+

3. Dérivée et tableau de variations

La dérivée de $f(x)$ est :

$$f'(x) = -2 \cos(x).$$

Les points critiques sont donnés par $f'(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sur $[\pi, 3\pi]$:

$$x = \frac{3\pi}{2} \quad (k = 2), \quad x = \frac{5\pi}{2} \quad (k = 3).$$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $\cos(x)$:

- $f'(x) > 0$ (croissante) si $\cos(x) < 0$,
- $f'(x) < 0$ (décroissante) si $\cos(x) > 0$.

Tableau de variations :

x	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	1	$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow 1$

4. Intersections avec les axes et description du graphe

Intersections avec l'axe des abscisses ($y = 0$) : Ce sont les zéros, soit les points :

$$\left(\frac{13\pi}{6}, 0\right), \quad \left(\frac{17\pi}{6}, 0\right).$$

Intersections avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) : L'intervalle $[\pi, 3\pi]$ ne contient pas $x = 0$, donc aucune intersection.

Description du graphe : La fonction $f(x) = 1 - 2\sin(x)$ sur $[\pi, 3\pi]$ est une sinusoïde transformée (amplitude 2, décalée verticalement de 1, inversée). Elle commence à $(\pi, 1)$, augmente jusqu'au maximum local $\left(\frac{3\pi}{2}, 3\right)$, puis diminue, passant par $(2\pi, 1)$, croise l'axe x à $\frac{13\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6}$ (négative entre ces points), atteint le minimum local $\left(\frac{5\pi}{2}, -1\right)$, et remonte à $(3\pi, 1)$.

Tableau de valeurs clés :

x	$\pi \approx 3.14$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$	$\frac{13\pi}{6} \approx 6.81$	$2\pi \approx 6.28$	$\frac{17\pi}{6} \approx 8.90$	$\frac{5\pi}{2} \approx 7.85$	$3\pi \approx 9.42$
$f(x)$	1	3	0	1	0	-1	1