Chapitre 4

Méthodes numériques

4.1 La bibliothèque matplotlib de Python : les fonctions de base

4.2 Zéros de fonctions : méthode de la bissection

4.2.1 Soit la fonction $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$.

a) Représenter la fonction dans l'intervalle $I = [0.1\,;2.4]$.

b) Écrire les six premiers intervalles successifs obtenus par la méthode de la bissection pour chercher les zéros de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle I.

4.2.2 Pour chacune des fonctions suivantes, faire trois itérations de la méthode de la bissection à partir de l'intervalle indiqué pour trouver sa racine dans cet intervalle. Puis déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution dont le chiffre des millièmes est significatif.

a) $f(x) = 0.3\,x^2 - 0.6\,x - 0.8$ dans l'intervalle $[2.8\,;3]$.

b) $f(x) = x^5 + x^3 - 1$ dans l'intervalle $[0\,;1]$.

c) $f(x) = (x\,\cos(x))^2 - 2.3$ dans l'intervalle $[1.3\,;5.3]$.

4.2.3 On considère l'équation :

$$e^x - (x+5) = 0$$

a) Déterminer le nombre et la position approximative des solutions positives de cette équation.

b) Utiliser l'algorithme de la bissection pour déterminer chacune de ces racines avec une erreur absolue inférieure à 10^{-7}.

4.2.4 Montrer que chacune des fonctions f suivantes possède un zéro unique. Calculer ce zéro par l'algorithme de la bissection.

a) $f(x) = x^3 + 10$
b) $f(x) = x^5 - 2\,x^4 + 100\,x^3 - 2$
c) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{2}\,\sin(x)$
d) $f(x) = 3\,x - \cos(x)$
e) $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$
f) $f(x) = x + e^x$

4.2.5 Montrer que la fonction $f = x^3 + 2\,x - 1$ possède un zéro dans l'intervalle $I = [0\,;1]$. Calculer ce zéro par l'algorithme de la bissection.

4.2.6 Déterminer une valeur approchée à 10^{-6} près des éventuels zéros de la fonction

$$f(x) = x^7 + 23\,x^5 + 2\,x^4 - 2$$

Calculer ce zéro par l'algorithme de la bissection.

4.2.7 Soit la fonction

$$f(x) = \cos(x^x) - \sin(e^x)$$

a) Représenter cette fonction sur l'intervalle $I = [0.5\,;\,2.5]$.
b) Déterminer graphiquement le nombre de zéros de f dans I.
c) Déterminer un zéro de f.
d) Représenter cette fonction sur l'intervalle $I = [0.1\,;\,10]$.

4.2.8 Utiliser la méthode de la bissection pour obtenir une valeur approchée du nombre $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-4} près.

4.2.9 Utiliser la méthode de la bissection pour obtenir une valeur approchée du nombre π.

4.3 Zéros de fonctions : méthode de Newton

4.3.1 Soit la fonction

$$f(x) = -5\,x^3 + 7\,x^2 + 3\,x - 3$$

a) Calculer les coordonnées des points à tangente horizontale et du point d'inflexion. Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-1\,;2]$.
b) Calculer la valeur des premiers termes de la suite de Newton si l'on choisit l'estimation initial $x_0 = 1$.
c) Calculer la valeur des premiers termes de la suite de Newton si l'on choisit l'estimation initial $x_0 = 2$.
d) Déterminer l'unique zéro de f compris entre 1 et 2.

4.3.2 L'équation

$$e^x - 3\,x^2 = 0$$

possède les solutions $s_1 = -0.4589623$ et $s_2 = 0.91$ ainsi qu'une troisième solution s_3 située près de 4.
Utiliser la méthode de Newton pour déterminer s_3 avec six décimales.

4.3.3 Trouver une estimation d'un zéro strictement positif des fonctions suivantes en appliquant la méthode de Newton.

a) $f(x) = x^3 - 2$ b) $f(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{4}$

4.3.4 Soit la fonction

$$f(x) = x^3 - 2\,x - 5$$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Montrer que $2 < \alpha < 3$.

b) A partir de $x_0 = 1$, déterminer le zéro de la fonction.

4.3.5 Donner une approximation de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton en partant du point $x_0 = 2$.

4.3.6 Une des difficultés de la méthode de Newton est de bien choisir x_0 de sorte que l'on ne tombe pas sur un point où la dérivée s'annule.
Utiliser l'algorithme de Newton avec la fonction $f(x) = \cos(x)$ en partant des points d'abscisse 1, 0.5, 0.1 puis 0.01.
Commenter et expliquer la situation à l'aide d'un graphique.

4.4 Zéros de fonctions : méthode de la sécante

4.4.1 A l'aide de la méthode de la sécante, calculer la racine douzième de 1.1 avec une précision de 8 décimales.

4.4.2 Rechercher, en utilisant la méthode de la sécante, les solutions de l'équation

$$x^3 + 1 = 3\,x$$

4.4.3 Calculer dans l'intervalle $I = [0\,;\pi]$ une approximation de la solution de l'équation

$$\cos(x) = 2\,\sin(x)$$

4.4.4 Rechercher, en utilisant la méthode de la sécante, les solutions de l'équation

$$e^{-x} = -\ln(x)$$

4.5 Un peu d'intégration numérique

4.5.1 Sans utiliser de bibliothèque autre que la bibliothèque mathématique standard de python, écrire une fonction qui prend deux nombres réels $a < b$ et un nombre entier n en paramètres. Cette fonction doit renvoyer une liste de $n + 1$ valeurs réelles, notées $x_0, x_1, \ldots, x_n$ telles que $x_0 = a$, $x_n = b$, tous les autres nombres étant uniformément répartis dans l'intervalle $[a, b]$.
L'instruction

```
print(listePoints(0, 2, 10))
```

fait afficher la liste

```
[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2]
```

à quelques erreurs d'arrondi près.

4.5.2 Compléter le code de la fonction de l'exercice précédent en lui ajoutant un paramètre optionnel `aleatoire=False`. Par défaut, le comportement de la fonction est le même que celle de l'exercice précédent. Si le paramètre `aleatoire` prend la valeur `True`, la fonction doit renvoyer une liste de $n+1$ valeurs réelles, notées $x_0, x_1, \ldots, x_n$ telles que $x_0 = a$, $x_n = b$, tous les autres nombres étant aléatoirement choisis dans l'intervalle $[a, b]$.

L'instruction

```
print(listePoints(0, 2, 10)) # Valeur par défaut de aleatoire
```

fait afficher la liste

```
[0, 0.2, 0.4,
 0.6000000000000001, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4,
 1.5999999999999999, 1.7999999999999998,
 1.9999999999999998]
```

L'instruction

```
print(listePoints(0, 2, 10, True))
```

fait afficher la liste

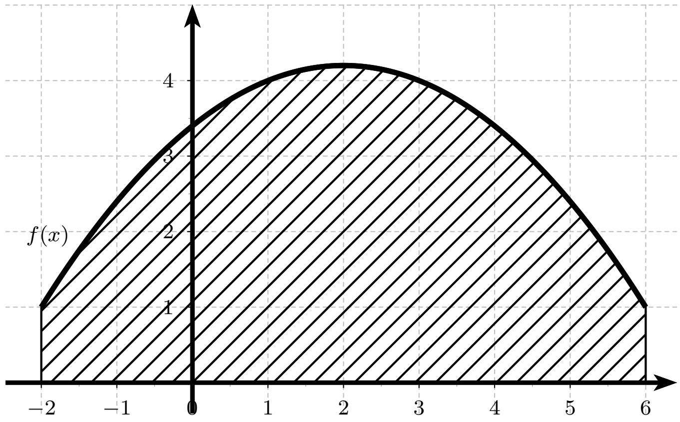
```
[0,
 0.06479694651588885, 0.28981342176727964, 0.3179007067671271,
 0.4070274425545328,  1.015739468424949,   1.1182123677493638,
 1.2618287932253878,  1.473438685747842,   1.519412756197574,
 2]
```

Il faut noter que le résultat change à chaque fois que le programme tourne.

4.6 Calcul d'aire sous une courbe par la méthode des rectangles

4.6.1 On supposera ici que nos fonctions sont toutes positives sur l'intervalle sur lequel on les considère.
Définissons d'abord ce qu'est l'aire sous la courbe représentative d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$: c'est tout simplement l'aire comprise entre la courbe représentative, l'axe

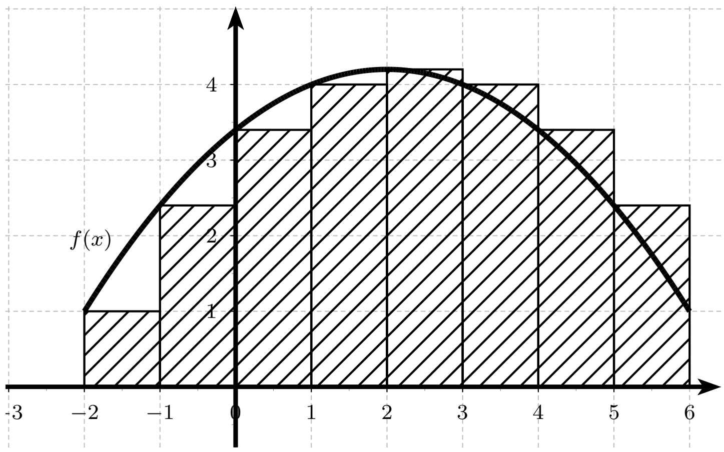
des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. On note cette aire $\int_a^b f(x)\,dx$.



Dans cette méthode, on calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de rectangles. Le domaine d'intégration est découpé en intervalles et on fait comme si la fonction restait constante sur chaque intervalle.
Sur chaque intervalle, on réalise ainsi l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\alpha)$$

où α est une abscisse appartenant à l'intervalle limité par a et b.
Nous nous limiterons ici aux cas où $\alpha = a$ ou $\alpha = b$, ce qui signifie que pour chaque intervalle nous considérons comme constante la valeur prise par la fonction à l'extrémité gauche ou droite de l'intervalle.
Comme exemple, nous allons réaliser un programme d'intégration pour $\alpha = a$ et nous visualiserons les rectangles. Cette approximation de l'aire est appelée somme à gauche, notée `SommeGauche`.

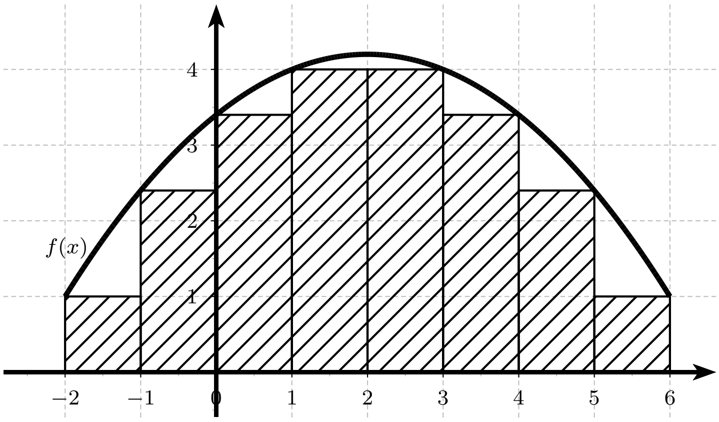


a) Représenter la fonction $f(x) = \frac{-1}{5}(x+2)(x-6)+1$ définie dans l'intervalle $[-2; 6]$.
b) Représenter ensuite les 8 rectangles comme sur la figure ci-dessus.
c) Finalement, estimer l'aire sous la courbe comme la somme de ces huit rectangles.

4.6.2 Soit la fonction $f(x) = \frac{-1}{5}(x+2)(x-6)+1$ définie dans l'intervalle $[-2; 6]$ représentée dans l'exercice précédent.

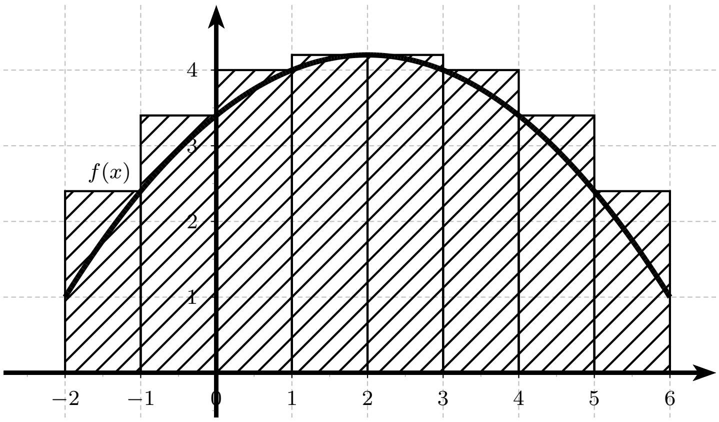
a) Calculer la somme à droite (`SommeDroite`) de cette fonction.

b) Pour chaque rectangle, choisir $\alpha = Min\,(f(x_i), x_i \in [a_i, a_i+1])$ où $a_i = -2, -1, \ldots, 5$. La somme de ces huit rectangles donne la somme inférieure (`SommeInferieure`).



Calculer cette somme inférieure.

c) Calculer également la somme supérieure (`SommeSuperieure`) de cette fonction sur le même intervalle.



4.6.3 Pour une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;\, b]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i\,h$ pour tout $i = 0, \ldots, n$.
Pour les quatre méthodes, écrire un programme qui dessine les rectangles et approche l'aire sous la courbe.

a) Avec la méthode de la somme à gauche (`SommeGauche`).

b) Avec la méthode de la somme à droite (`SommeDroite`).

c) Avec la méthode de la somme à inférieure (`SommeInferieure`).

d) Avec la méthode de la somme à supérieure (`SommeSuperieure`).

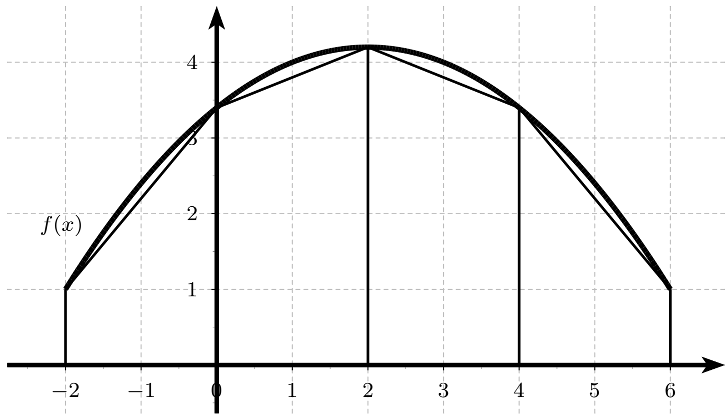
4.6.4 Estimer les deux intégrales à l'aide des 4 méthodes de l'exercice 4.6.3.

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi\, x)\, \sqrt{x^2+1}\, dx$

b) $\int_0^1 (x\, \ln(x+1) + 1)\; dx$

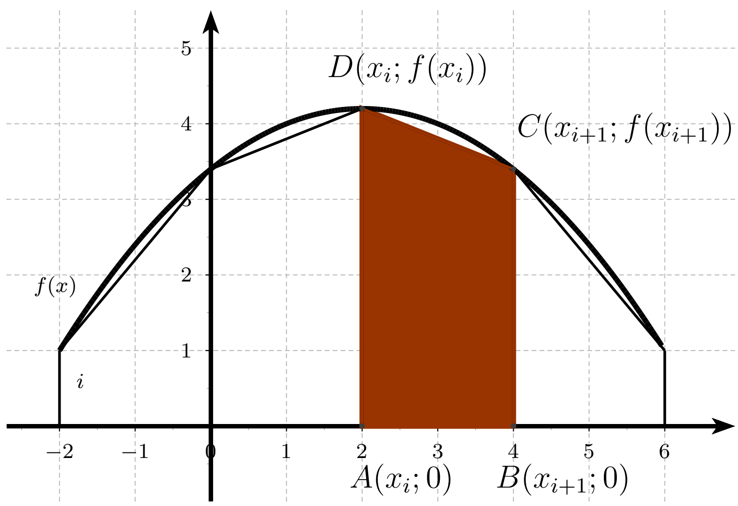
4.7 Calcul d'aire sous une courbe par la méthode des trapèzes

4.7.1 Le principe général est exactement le même que celui de la méthode des rectangles, mais on approche cette fois-ci la courbe sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$ par le segment de droite reliant les deux points de la courbe d'abscisses a_i et a_{i+1}, ce qui revient à calculer une somme d'aires de trapèzes pour approcher l'intégrale.



Pour la fonction $f(x) = \frac{-1}{5}(x+2)(x-6)+1$ définie dans l'intervalle $[-2; 6]$, représenter les 4 trapèzes, puis estimer l'aire comme somme de ces quatre trapèzes (`SommeTrapeze`).

4.7.2 Pour une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i\,h$ pour tout $i = 0, \ldots, n$.
Écrire un programme `SommeTrapeze` qui dessine les trapèzes de sommets $A(x_i; 0)$, $B(x_{i+1}; 0)$, $C\,(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$ et $D\,(x_i; f(x_i))$, puis approche l'aire sous la courbe comme la somme de tous les trapèzes.



4.7.3 Soit l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

a) Évaluer cette intégrale par la méthode des trapèzes pour le pas $h = \frac{1}{3}$.

b) Calculer la valeur exacte de I.

c) Expliquer pourquoi la valeur numérique obtenue est supérieure à $\ln(2)$.

d) Est-ce vrai pour tout pas h ?

4.7.4 Calculer à l'aide de la méthode des trapèzes

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

Combien de sous-intervalles sont nécessaires pour que $|\pi - I| < 10^{-6}$?

4.7.5 (??) À l'aide des programmes des exercices 4.6.3 et 4.7.2, calculer une approximation de

$$\int_{-0.5}^1 e^{-x^2}\,dx$$

dont les 6 premières décimales sont correctes, en découpant l'intervalle $[-0.5, 1]$ en n morceaux. Quelle est la plus petite valeur de n qui garantit ce résultat ?

4.8 Calcul d'aire sous une courbe par la méthode de Simpson

4.8.1 Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
Soit x_0 le milieu de l'intervalle.

a) Démontrer qu'il existe $h > 0$ tel que $a = x_0 - h$ et $b = x_0 + h$.

b) Pour calculer l'aire sous la courbe, on remplace le graphe de f par la parabole (ou la droite) $y = a\,x^2 + b\,x + c$ passant par les trois points $P(x_0 - h;\ f(x_0 - h))$, $Q(x_0;\ f(x_0))$ et $R(x_0 + h;\ f(x_0 + h)$. Démontrer que

$$I = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \left(a\,x^2 + b\,x + c\right)\,dx = \int_{-h}^{h} \left(A\,x^2 + B\,x + C\right)\,dx$$

où $g : x \to A\,x^2 + B\,x + C$ est le polynôme qui passe par les points $P'(-h;\ f(x_0 - h))$, $Q'(0;\ f(x_0))$ et $R'(h;\ f(x_0 + h)$.

c) Démontrer que $I = \frac{2}{3}\,Ah^3 + 2Ch$.

d) Finalement, démontrer que $I = \dfrac{h}{3}\left(f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)\right)$.

4.8.2 Utiliser la méthode de Simpson pour calculer

$$I = \int_1^9 \sqrt{x}\,dx$$

4.8.3 On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} 8\,x^4 - 8\,x^2 + 2\,dx$.

a) Donner la valeur de l'approximation de l'intégrale obtenue par la méthode de Simpson.

b) Calculer l'erreur exacte en se servant du calcul explicite de I.

c) Dans ce cas, la méthode de Simpson donne-t-elle un bon résultat ? Expliquer votre réponse.

4.9 Applications de l'intégration numérique

4.9.1 Soit f une fonction qui ne possède pas de primitive s'exprimant à l'aide de fonctions simples.
On peut toutefois définir une primitive F en estimant l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Tracer les graphes de f et F sur l'intervalle $[a;\, b]$ dans les situations suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \pi$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, $a = 0$ et $b = 3$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos(x)}}$, $a = 1$ et $b = 5$.

4.9.2 Estimer les intégrales suivantes et démontrer que leur valeur converge vers la valeur donnée.

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^{10} x^3\, e^{-x}\, dx = 6 - 1366\, e^{-10}$.

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{10} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \arctan\left(e^{10}\right) - \frac{\pi}{4}$.

c) $I_3 = \displaystyle\int_0^{10} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\arctan(10) + \frac{5}{101}$.

4.9.3 Calculer le plus précisément possible les intégrales suivantes.

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$.

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

c) $I_3 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

4.10 Solutions des exercices

4.2.1

$I_0 = [0.1\,;2.4]$; $I_1 = [0.1\,;1.25]$; $I_2 = [0.675\,;1.25]$; $I_3 = [0.9625\,;1.25]$; $I_4 = [0.9625\,;1.10625]$; $I_5 = [0.9625\,;1.034375]$

4.2.2

a) 2.9 ; 2.95 ; 2.925. Il faut au moins neuf itérations.

b) 0.5 ; 0.75 ; 0.875. Il faut au moins onze itérations.

c) 3.3 ; 2.3 ; 1.8. Il faut au moins treize itérations.

4.2.3

a) Si $f(x) = e^x - (x+5)$, alors $f'(x) = e^x - 1$ est positive pour $x > 0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, f ne croise l'axe des x qu'une seule fois. Puisque $f(0) = -4$ et $f(2) = 0.38$, il y a une seule racine entre $x = 0$ et $x = 2$.

b) On obtient $x = 1.9368473291$ en 23 itérations à partir de l'intervalle $[0\,;2]$.

4.2.4

a) -2.1544347

b) 0.2718682

c) 0.6840367

d) 0.3167508

e) 1.302964

f) -0.5671433

4.2.5

$x = 0.4533976515$

4.2.6

$x = 0.595471$

4.2.7 —

4.2.8 —

4.2.9 —

4.3.1

a) minimum : $(-0.18\,;-3.28)$, maximum : $(1.11\,;2.12)$, point d'inflexion : $(0.47\,;-0.58)$

b) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

c) 1.6896552, 1.5618930, 1.5372456, 1.5363390, 1.5363378

d) 1.5363378

4.3.2

$s_3 = 3.733079$

4.3.3

a) 1.259921050

b) 2.474576794

4.3.4

a) A partir du tableau des variations de f

b) 2.0945514815

4.3.5 —

4.3.6 —

4.4.1

$r = 1,00796779$

4.4.2

$x_1 = -1.8793852416$, $x_2 = 0.3472963553$ et $x_3 = 1.5320888862$

4.4.3

$x = 0.4636476092$

4.4.4

$x = 0.5671432873$

4.5.1

```
def listePoints(a, b, n):
    if a > b:
        a, b = b, a
    lp = [a]
    delta = (b - a) / n
    for i in range(n):
        a = a + delta
        lp.append(a)
    return lp
```

4.5.2

```
import random


def listePoints(a, b, n, aleatoire=False):
    if a > b:
        a, b = b, a
    lp = [a]
    if not aleatoire:
        delta = (b - a) / n
        for i in range(n):
            a = a + delta
            lp.append(a)
    else:
        for i in range(n - 1):
            x = a + (b - a) * random.random()
            lp.append(x)
        lp.append(b)
        lp.sort()
    return lp
```

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.6.4

4.7.1

4.7.2

4.7.3

4.7.4

4.7.5

4.8.1

4.8.2

4.8.3

4.9.1

4.9.2

4.9.3