5) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

① f' et $D_{f'}$:

$$f'(x) = 3x^2 + (3x^{-1})' = 3x^2 + 3(-1x^{-2})$$
$$= 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

② zeros de f' :

$f'(x) = 0$ si $3x^4 - 3 = 0$ et que $x \neq 0$

$$3x^4 = 3 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

③ Tableau des signes de f' et croissance de f :

x		-1		0		1		
	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\leftarrow f'$
	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	$\leftarrow f$

MAX : $(-1 ; -4)$

MIN : $(1 ; 4)$

6) $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x-5}$

① f' et $D_{f'}$:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)' \cdot (2x-5) - (2x+3)(2x-5)'}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{2(2x-5) - (2x+3) \cdot 2}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{4x-10-4x-6}{(2x-5)^2} = -\frac{16}{(2x-5)^2}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{2{,}5\}$$

② Zeros de f' :

$f'(x) = 0$ si $-16 = 0$, ce qui est impossible. La dérivée f' n'a pas de zero.

③ Signes de f' et croissance de f :

x		$2{,}5$		
	$-$	‖	$-$	f'
	↘	‖	↘	f

La fonction est strictement décroissante. Elle n'a pas de min., pas de max. et pas de palier.

8) $f(x) = x^2\sqrt{27 - x^2}$

① f' et $D_{f'}$:

$$f'(x) = (x^2)'\sqrt{27-x^2} + x^2 \cdot \left(\sqrt{27-x^2}\right)'$$

$$= 2x \cdot \sqrt{27-x^2} + x^2 \cdot \left[(27-x^2)^{1/2}\right]'$$

$$= 2x\sqrt{27-x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (27-x^2)^{-1/2} \cdot (27-x^2)'$$

$$= 2x\sqrt{27-x^2} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{27-x^2}} \cdot -\cancel{2}x$$

$$= \frac{2x\sqrt{27-x^2} \cdot \sqrt{27-x^2}}{\sqrt{27-x^2}} + \frac{-x^3}{\sqrt{27-x^2}}$$

$$= \frac{2x(27-x^2) - x^3}{\sqrt{27-x^2}}$$

$$= \frac{54x - 2x^3 - x^3}{\sqrt{27-x^2}} = \frac{54x - 3x^3}{\sqrt{27-x^2}}$$

$$= \frac{3x(18-x^2)}{\sqrt{27-x^2}}$$

$$\sqrt{27-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 27 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x \approx \pm 5{,}2$$

Vu que $27-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5,2 ; 5,2]$, on a

$D_f =]-5,2 ; 5,2[$

(2) Zéros de f' :

$f'(x) = 0$ si $3x(18-x^2) = 0$,

$x = 0$ ou $x^2 = 18$

$x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

$x \simeq \pm 4,2$

(3) Signe de f' et croissance de f :

$-5,2$		$-4,2$		0		$4,2$		$5,2$
‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
‖	↗	MAX	↘	MIN	↗	MAX	↘	‖

Coordonnées :

$$\left(-4{,}2\,;\ \overset{54}{f(-4{,}2)}\right) \qquad \left(0\,;\ \overset{0}{f(0)}\right) \qquad \left(4{,}2\,;\ \overset{54}{f(4{,}2)}\right)$$

max $\qquad$ min $\qquad$ max

$$f(-4{,}2) = (-4{,}2)^2 \cdot \sqrt{27-(-4{,}2)^2}$$

$$= (-3\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{27-(-3\sqrt{2})^2}$$

$$= 9 \cdot 2 \cdot \sqrt{27 - 9 \cdot 2}$$

$$= 18 \cdot 3 = 54$$