a) $u_k = (-1)^{k-1} \qquad k \geq 1$

$\lim_{k\to\infty} u_k$ n'existe pas $\Rightarrow \sum_k u_k$ diverge

$S_1 = 1$

$S_2 = 1-1=0$

Propriété 3 p. 5

$S_3 = 1-1+1 = 1$

$S_4 = 1-1+1-1 = 0$

b) On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$

Or, $\displaystyle\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k \leq \left(\frac{2}{5}\right)^k$ si $k \geq 1$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k$ converge.

Propriété 5 p. 5 et Critère de comparaison p. 9

c) $\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{2k+1} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} > 0$

La série diverge.

d) On peut utiliser le fait que

$$\lim \sqrt[k+1]{10} = \lim 10^{\frac{1}{k+1}} = « 10^0 » = 1$$

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{\sqrt[k+1]{10}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt[k+1]{10}} \text{ diverge}$$

$\Rightarrow$ La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt[k+1]{10}}$ diverge

e) $\sum \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k}$

Or, $\sum \frac{1}{k}$ diverge et donc $\sum \frac{1}{2k}$ aussi, par linéarité.

f) On a $u_k = \frac{1}{10k+1}$ et $v_k = \frac{1}{k}$

Appliquons le critère d'équivalence de la page 13.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{10k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{10k+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{10k} = \frac{1}{10} \neq +\infty$$

Les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont donc équivalentes.

Vu que $\sum v_k$ diverge, $\sum u_k$ aussi.

g) On applique de nouveau le critère d'équivalence : $\sum v_k = \sum \frac{1}{k}$ diverge

$u_k = \frac{1}{\sqrt{k^2+k}}$

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}}{\frac{1}{k}} = \lim \frac{k}{\sqrt{k^2+k}} \cdot \frac{1/k}{1/k}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{k^2+k} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2}}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{k^2} + \frac{k}{k^2}}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}} = 1 \neq +\infty$$

On en conclut que la série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \quad \text{diverge.}$$