a) $U_k = \dfrac{k+1}{k^3}$ Soit $k \geq 1$

$$\frac{k+1}{k^3} = \frac{k}{k^3} + \frac{1}{k^3} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{k+1}{k^3} = \sum \frac{1}{k^2} + \sum \frac{1}{k^3}$$

Vu que les deux sommes du membre de droite convergent, la première converge également.

b) $U_k = \dfrac{k^2+1}{k^3+1} = \dfrac{k^2+1}{(k+1)(k^2-k+1)}$

Si $k \geq 1$,

$$\frac{k^2+1}{(k+1)(k^2-k+1)} > \frac{\cancel{k^2+1}}{(k+1)\cancel{(k^2+1)}} = \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2k}$$

Vu que $\sum \frac{1}{2k}$ diverge, $\sum u_k$ diverge aussi.

c) $u_k = \frac{1}{k^3-1}$

Si $k \geq 2$, $2k^3 - 2 \geq k^3 \Leftrightarrow k^3 \geq 2$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{2k^3-2} \leq \frac{1}{k^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{k^3-1} \leq \frac{1}{k^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k^3-1} \leq \frac{2}{k^3}$$

Vu que $\sum \frac{2}{k^3} = 2 \sum \frac{1}{k^3}$ est une série convergente, la série

$$\sum \frac{1}{k^3-1} \text{ converge aussi.}$$

On aurait également pu utiliser le critère d'équivalence de la p. 13 :

$\sum \frac{1}{k^3-1}$ et $\sum \frac{1}{k^3}$ sont équivalentes

car $\lim \dfrac{1/k^3}{1/(k^3-1)} = \lim \dfrac{k^3-1}{k^3} = 1$

d) $u_k = \dfrac{k-2}{k^3}$

On voit directement que $\dfrac{k-2}{k^3} < \dfrac{k}{k^3} = \dfrac{1}{k^2}$

pour tout $k \geq 3$.

Vu que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum \frac{k-2}{k^3}$ aussi.

e) $\sum \frac{1}{k^{1/3}}$ est une série de Riemann

et comme $1/3 < 1$, cette série diverge.

Voir à la page 8 du cahier n° 4.

f) $u_k = \frac{k+2}{k^2+k}$

On voit facilement que $k^2+k < k^2+4k+4$

si $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2+k} > \frac{1}{k^2+4k+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+2}{k^2+k} > \frac{k+2}{(k+2)^2} = \frac{1}{k+2} > \frac{1}{10k}$$

pour les mêmes valeurs de k

Vu que $\sum \frac{1}{10k} = \frac{1}{10} \sum \frac{1}{k}$ diverge,

$\sum \frac{k+2}{k^2+k}$ diverge également.

On aurait aussi pu montrer que si

$u_k = \frac{k+2}{k^2+k}$ et que $v_k = \frac{1}{k}$,

les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont équivalentes.

Vu que $\sum v_k$ diverge, on peut conclure que

$\sum u_k$ diverge.

g) $\sum \frac{1}{3k+1}$ est clairement équivalente à $\sum \frac{1}{k}$.

La série $\sum \frac{1}{3k+1}$ est donc divergente.

h) $\sum \frac{k^4+5}{k^5}$ est clairement équivalente à la série $\sum \frac{1}{k}$ et donc elle diverge.

i) $u_k = \frac{\ln(k)}{k}$

On sait que si $k > 3$, alors $\ln(k) > 1$

$\Rightarrow \quad \frac{\ln(k)}{k} > \frac{1}{k}$ si $k > 3$

Vu que $\sum \frac{1}{k}$ diverge, la série $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ diverge également.

j) $u_k = \frac{\ln(k)}{k^2} = \frac{\ln(k)}{k} \cdot \frac{1}{k}$

$$\frac{\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}}{\frac{\ln(k)}{k}} = \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \cdot \frac{k}{\ln(k)}$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 1} \cdot \underbrace{\frac{k}{(k+1)^2}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0}$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

Ce qui revient à dire que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 0$,

et donc, par le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge.