a) $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{1}{2k-1} \qquad k \geq 1$

$$= (-1)^{k+1} \cdot v_k$$

$v_k = \dfrac{1}{2k-1} \qquad v_{k+1} = \dfrac{1}{2(k+1)-1} = \dfrac{1}{2k+1}$

On a $2k+1 > 2k-1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2k-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(k+1)-1} < \frac{1}{2k-1}$$

$$\Leftrightarrow v_{k+1} < v_k \qquad \forall k \geq 1$$

De plus $\lim v_k = \lim \dfrac{1}{2k-1} = 0$

Le critère de Leibniz s'applique, la série converge.

Voyons maintenant si la série converge absolument :

$$|u_k| = \frac{1}{2k-1} \quad \text{pour } k \geq 1$$

On a $\quad 2k-1 < 2k$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}$$

La série de terme général $|u_k|$ admet donc une minorante divergente, ce qui fait qu'elle diverge.

La série de terme général u_k est donc semi-convergente.

b) $v_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k^{1/2}} = (-1)^{k+1} \cdot u_k$

On voit directement que $\lim u_k = \lim \frac{1}{k^{1/2}} = 0$

De plus, on a

$$k+1 > k \quad \text{si } k \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k+1} > \sqrt{k}$$ (Croissance de la fonction $\sqrt{\ }$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} < u_k$$

Le critère de Leibniz s'applique et la série $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ converge.

Cette série est semi-convergente car

$\sum \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge.

Il s'agit en effet d'une série de Riemman, de type $\sum \frac{1}{k^{\alpha}}$, avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$.