a) $x^k = 1 \cdot x^k = a_k x^k$ avec $a_k = 1$ $\forall k \geq 1$

$S = \sum x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$

La série S est géométrique de raison x.

Elle converge $\Leftrightarrow$ $|x| < 1$

Le critère de d'Alembert donne

$$\lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

$\Rightarrow$ $r = 1$

D'après les résultats du cours, on sait de plus que si $|x| = 1$, la série diverge.

Finalement : $\sum x^k < \infty \Leftrightarrow |x| < 1$

b) $\frac{k!}{x^k}$ n'est pas sous la forme $a_k \cdot x^k$

Transformons cette expression :

$$\frac{k!}{x^k} = k! \cdot \frac{1}{x^k} = k! \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$= k! \cdot y^k \quad \text{avec} \quad y = \frac{1}{x} \qquad x, y \neq 0$$

On applique le critère de d'Alembert à la série $\sum k! \cdot y^k$:

$$\lim \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim \frac{1}{k+1} = 0$$

$r = 0 \Rightarrow \sum k! \, y^k$ diverge $\forall \, y \neq 0$

$\Rightarrow \sum k! \left(\frac{1}{x}\right)^k \to \infty \quad \forall \, x \neq 0.$

c) $\frac{1}{(2k-1)\cdot x^k} = \frac{1}{(2k-1)}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{1}{(2k-1)}\cdot y^k$

avec $y = \frac{1}{x}$ pour $x, y \neq 0$

Vu que $\lim \left| \frac{1/(2k-1)}{1/(2(k+1)-1)} \right| = \lim \left| \frac{2k+1}{2k-1} \right|$

$= 1$

On a $\sum \frac{y^k}{2k-1} < \infty$ si $|y| < 1$

(d'Alembert)

Ce qui signifie que $\sum \frac{1}{(2k-1)x^k} < \infty$

si $|x| > 1$

On doit encore étudier les cas

$x = 1 \qquad x = -1$

Posons $x=1$. On a

$$\frac{1}{(2k-1)\cdot 1^k} = \frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}$$

Vu que $\sum \frac{1}{k} > \infty$ et d'après les critères de comparaison, la série diverge pour $x=1$.

Posons $x=-1$. On a

$$\frac{1}{(2k-1)(-1)^k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k-1)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{2k-1} = (-1)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2k-1}$$

Posons $u_k = \frac{1}{2k-1}$

On applique le critère de Leibniz pour les séries alternées :

$$\lim u_k = \lim \frac{1}{2k-1} = 0$$

$$2(k+1)-1 = 2k+2-1 = 2k+1 > 2k-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(k+1)-1} < \frac{1}{2k-1}$$

$$\Rightarrow \quad u_{k+1} < u_k \qquad \forall k \geq 1$$

La série $\sum (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k-1}$ converge

et donc $(-1) \sum (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k-1} =$

$$\sum (-1)^k \cdot \frac{1}{2k-1} \quad \text{ossi!}$$

En fin de compte, la série converge si $|x| > 1$ ou que $x = -1$ et diverge pour $|x| < 1$ ou $x = 1$.